



Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
POSGRADO EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL

**DETERMINACIÓN DE COEFICIENTES DE DISEÑO
Y TRAYECTORIAS DE AGRIETAMIENTO DE
LOSAS CIRCULARES, ELÍPTICAS Y
TRIANGULARES EN CONDICIÓN AISLADA**

PRESENTA:
OMAR CABALLERO GARATACHEA
Tutor
DR. GELACIO JUÁREZ LUNA

México, D.F 2012

Agradecimientos

Primeramente doy infinitamente gracias a Dios, por haberme dado fuerza y valor para terminar mis estudios de maestría.

A mis padres y hermanos que me acompañaron en esta aventura que significó la maestría y que de forma incondicional entendieron mis ausencias y momentos difíciles.

Agradezco al Dr. Gelacio Juárez Luna por brindarme su apoyo como director de la tesis durante el tiempo que tomó el desarrollo de la misma y por haber confiado en mi persona. También, aprovecho para expresar la motivación que de él se derivó por su ejemplo y dedicación.

Al Dr. Oscar M. González Cuevas por su amable ayuda y acertados comentarios.

Al Dr. Francisco Casanova del Ángel por su amable ayuda en la revisión de este trabajo y sus acertados comentarios.

Al Dr. Juan Casillas García de León por brindar su valiosa información y sugerencias en la realización de esta tesis.

Por último, agradezco sinceramente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado en este proceso, y al área de estructuras de la Universidad Autónoma Metropolitana por ofrecer una educación de calidad que me ha permitido desarrollarme como persona y como profesional.

Índice

Capítulo 1 Introducción.....	6
1.1 Introducción	6
1.2 Historia.....	6
1.3 Evolución de los métodos de análisis y diseño de losas	7
1.3.1 Problema de valores en la frontera	7
1.4 Discusión.....	12
1.5 Objetivos.....	12
1.5.1 General.....	12
1.6 Metas	12
1.7 Organización de la tesis	13
Capítulo 2 Métodos para determinar la carga de colapso	14
2.1 Teoría de análisis límite	14
2.1.1 Método del límite superior	14
2.1.2 Método del límite inferior.....	14
2.2 Mecánica numérica	15
2.2.1 Modelado del concreto.....	15
2.2.1.1 Corrimiento	16
2.2.1.2 Plasticidad	17
2.3 Discusión de los métodos para determinar la carga de colapso	18
Capítulo 3 Simulación numérica	19
3.1 Calibración numérica para simular losas	19
3.1.1 Introducción.....	19
3.1.2 Descripción de experimento en laboratorio	19
3.1.2.1 Elección del espécimen de prueba.....	20
3.1.3 Modelado numérico	21
3.1.4 Comparación de resultados	21
3.2 Simulación numérica	23
3.2.1 Introducción	23
3.2.2 Análisis elástico.....	24
3.2.2.1 Consideraciones en el mallado.....	24
3.2.2.2 Losas triangulares.....	25
3.2.2.3 Losas circulares	28
3.2.2.4 Losas elípticas.....	33
3.2.3 Análisis no lineal.....	38
3.2.3.1 Consideraciones en el mallado.....	41
3.2.3.1.1 Verificación del mallado	43
3.2.3.2 Losas triangulares.....	44
3.2.3.3 Losas circulares	45
3.2.3.4 Losas elípticas.....	46
Capítulo 4 Determinación de coeficientes de diseño y trayectorias de agrietamiento	49
4.1 Coeficientes de diseño	49

4.1.1 Introducción.....	49
4.1.2 Losas triangulares	52
4.1.3 Losas circulares	54
4.1.4 Losas elíptica	55
4.2 Trayectorias de agrietamiento.....	57
4.2.1 Introducción.....	57
4.2.2 Losas triangulares	57
4.2.3 Losas circulares	58
4.2.4 Losas elípticas	60
Conclusiones y recomendaciones	63
Conclusiones	63
Recomendaciones.....	64
Trabajos futuros.....	64
Referencias	65
Anexo I Variación de los coeficientes.....	68
Anexo II Cálculo de momentos flexionantes	76

Lista de figuras

Figura 1.1. Placa con condiciones en la frontera sobre Γ	8
Figura 1.2. Cinemática de deformación de una placa	8
Figura 2.1. Modelo de agrietamiento distribuido	15
Figura 2.2. Mallado de elemento finito en la zona de adherencia.....	17
Figura 2.3. Modelo constitutivo bilineal y superficie de fluencia de Von Mises.....	18
Figura 3.1 Dimensiones de especímenes de prueba	19
Figura 3.2. Modo de aplicación de carga vertical	20
Figura 3.3. Distribución de acero de refuerzo del espécimen de prueba en estudio	20
Figura 3.4. Malla de elementos finitos: a) acero de refuerzo y b) concreto simple	21
Figura 3.5. Comparacion entre curva experimental y analítica.....	22
Figura 3.6. Evolución gradual del agrietamiento: a) parte superior y b) parte inferior.....	23
Figura 3.7. Elementos placa donde: a) elemento finito, b) grados de libertad, c) desplazamientos y d) elementos mecánicos	25
Figura 3.8. Estudio de losas triangulares: a) sistema de referencia y b) mallados de elementos finitos placa	26
Figura 3.9. Coeficientes en dirección x sobre el eje en placas triangulares con: a) apoyos simples y b) apoyos empotrados	27
Figura 3.10. Distribución de momentos flexionantes típica en placas triangulares empotradas en los apoyos en sentido: a) transversal y b) longitudinal	28
Figura 3.11. Propuesta del acero de refuerzo en placas triangulares donde: a) refuerzo positivo y b) refuerzo negativo.....	28
Figura 3.12. Modelo de elementos finitos general para placa circular.....	29
Figura 3.13. Estado de momentos y cortantes en un elemento diferencial de espesor h	30
Figura 3.14. Comparación entre las dos formas de solución para placas circulares con: a) apoyos simples y b) empotrados	31
Figura 3.15. Distribución de momentos máximos en una losa circular empotrada en los apoyos...	32
Figura 3.16. Configuración teórica del acero de refuerzo en una losa circular	32

Figura 3.17. Propuesta del acero de refuerzo en placas circulares donde: a) refuerzo positivo y b) refuerzo negativo.....	33
Figura 3.18. Modelo de elementos finitos para placa elipsoidal	34
Figura 3.19. Coeficientes elásticos para placas elipsoidales con condiciones de apoyo empotrado para distintas relaciones b/a : a) 0.5, b) 0.6, c) 0.7, d) 0.8 y e) 0.9.....	35
Figura 3.20. Coeficientes elásticos para placas elipsoidales en condiciones de apoyo simple para distintas relaciones a/b : a) 0.5, b) 0.6, c) 0.7, d) 0.8 y e) 0.9	37
Figura 3.21. Distribución de momentos en elipse empotrada en los apoyos en dirección: a) larga y b) corta	38
Figura 3.22. Propuesta del acero de refuerzo en placas elípticas donde: a) refuerzo positivo y b) refuerzo negativo.....	38
Figura 3.23. Modelo constitutivo general para el acero de refuerzo utilizado en el análisis no lineal de losas de concreto reforzado	39
Figura 3.24. Modelo constitutivo general para el concreto simple: a) curva esfuerzo deformación y b) superficie de falla.....	40
Figura 3.25. Elemento sólido donde: a) elemento finito, b) grados de libertad, c) desplazamientos y d) deformaciones	42
Figura 3.26. Elemento barra donde: a) elemento finito, b) grados de libertad, c) desplazamientos y d) tensiones.....	42
Figura 3.27. Mallado en modelos numéricos: a) propuesto y b) refinado.....	43
Figura 3.28. Malla de losa triangular con $a=4m$ donde: a) distribución del acero y b) malla de concreto.....	44
Figura 3.29. Curvas carga vs desplazamiento en el centro en losa triangular con $a=4m$ en condición: a) apoyada y b) empotrada	45
Figura 3.30. Malla de losa circular con $r=2m$ donde: a) distribución del acero y b) malla de concreto.....	45
Figura 3.31. Curva carga vs desplazamiento en el centro en losa circular con $r=2m$ en condición: a) apoyada y b) empotrada	46
Figura 3.32. Malla de losa elíptica donde: a) distribución del acero y b) malla de concreto	46
Figura 3.33. Curva carga vs desplazamiento en el centro en losa elíptica con relación $b/a=0.5$ con condición: a) apoyada y b) empotrada	47
Figura 3.34. Curva carga vs desplazamiento en el centro en losa elíptica con relación $b/a=0.6$ con condición: a) apoyada y b) empotrada	47

Figura 3.35. Curva carga vs desplazamiento en el centro en losa elíptica con relación $b/a=0.7$ con condición: a) apoyada y b) empotrada	47
Figura 3.36. Curva carga vs desplazamiento en el centro en losa elíptica con relación $b/a=0.8$ con condición: a) apoyada y b) empotrada	48
Figura 3.37. Curva carga vs desplazamiento en el centro en losa elíptica con relación $b/a=0.9$ con condición: a) apoyada y b) empotrada	48
Figura 4.1 Planteamiento de sistema de referencia	49
Figura 4.2 Configuración de esfuerzos en elementos sólidos	50
Figura 4.3 Zonas de análisis de momentos en triángulo	53
Figura 4.4. Dirección de esfuerzos principales en zona C del triángulo	53
Figura 4.5. Zonas de análisis de momentos en círculos	54
Figura 4.6. Zonas de análisis de momentos en losas elípticas	55
Figura 4.7. Evolución del agrietamiento en losa triangular empotrada: a) parte superior y b) parte inferior.....	57
Figura 4.8. Evolución del agrietamiento del triángulo en condición de apoyo simple: a) parte superior y b) parte inferior	58
Figura 4.9. Evolución del agrietamiento de losa circular empotrada: a) parte superior y b) parte inferior.....	59
Figura 4.10. Evolución del agrietamiento de losa circular simplemente apoyada en: a) parte superior y b) parte inferior	60
Figura 4.11. Evolución del agrietamiento de losa elíptica empotrada en: a) parte superior y b) parte inferior.....	61
Figura 4.12. Evolución del agrietamiento de losa elíptica simplemente apoyada en: a) parte superior y b) parte inferior	62

Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción

Las losas son subsistemas estructurales ampliamente utilizados en la construcción de estructuras, que se utilizan generalmente en edificaciones estructuradas con marcos de acero, marcos de concreto reforzado y muros de mampostería. Los sistemas estructurales de concreto reforzado que utilizan losas se dividen en dos grupos principales: losas planas y apoyadas. Las losas planas son aquellas que están apoyadas directamente sobre las columnas sin tener vigas interiores o de borde. Este sistema entró en desuso en la Ciudad de México después del sismo de 1985, por lo que en esta tesis se estudian las losas apoyadas, que se caracterizan por estar soportadas en vigas y presentar una mejor respuesta ante carga sísmica, en especial las que se encuentran sostenidas perimetralmente en su totalidad.

Las demandas de urbanización, optimización de espacios e innovación de diseños arquitectónicos han dado lugar a la construcción de estructuras con geometrías irregulares. El efecto de esta transformación requiere la construcción de losas, cuya seguridad estructural satisfaga las necesidades arquitectónicas del proyecto. Sin embargo, para losas con geometrías diferentes a las rectangulares es incorrecto utilizar los métodos usados tradicionalmente para el análisis y diseño de losas rectangulares. Lo anterior requiere de establecer métodos de análisis y diseño que consideren el comportamiento de losas no rectangulares a través de una adecuada estructuración.

1.2 Historia

El avance de las civilizaciones modernas requirió de estructuras cada vez más altas, nuevas formas de construcción que hacía que las antiguas técnicas resultaran obsoletas. Lo anterior, hizo que los sistemas de piso evolucionaran hasta ser una parte fundamental en la construcción, surgiendo así necesidades de análisis y diseño rigurosos.

A finales del siglo XVIII aparecen los primeros estudios acerca de la flexión de placas con la finalidad de estudiar sus vibraciones, prescindiendo del interés por conocer su distribución de esfuerzos y resistencia. Lagrange (1813) obtuvo una ecuación que describe la flexión y vibración de placas.

Posteriormente, Navier (1823) presentó una solución de la ecuación de Lagrange para el caso de una placa rectangular simplemente apoyada en sus bordes. Con esta solución se obtiene la deflexión, curvaturas y esfuerzos en cualquier punto de la placa bajo cargas

uniformes y no uniformes. Poisson (1829) derivó un conjunto de condiciones generales de frontera (condiciones de equilibrio y de deformación en los bordes de las placas) y fue capaz de obtener soluciones para placas circulares.

Kirchhoff (1850) derivó la ecuación de Lagrange y sus correspondientes condiciones en la frontera mediante el principio de energía. Finalmente, Kelvin y Tait (1867) mostraron que existe una aparente discrepancia entre la teoría de Kirchhoff y la de Poisson, pero concluyen que estas dos se pueden aplicar con ciertas limitaciones que son análogas a las existentes en la teoría de vigas. Por ejemplo, que la teoría elástica de placas deja de ser válida cuando el claro llega a ser muy pequeño comparado con el espesor de la placa.

En cuanto a la teoría sobre placas gruesas, Reissner-Mindlin (1951) proponen un conjunto de hipótesis cinemáticas para la deformación de una placa bajo flexión que permite relacionar los desplazamientos con las deformaciones. Una vez obtenidas las deformaciones, las ecuaciones de la elasticidad permiten encontrar los esfuerzos y la ecuación que relaciona desplazamientos con las fuerzas externas.

Lo anterior explica brevemente los avances realizados en el análisis de placas elásticas al término del siglo XIX y mitad del siglo XX, los cuales son de gran importancia con la aparición de los primeros sistemas de piso de concreto reforzado tal y como se conocen actualmente.

Es de interés mencionar que no existen recomendaciones para el análisis y diseño de losas no rectangulares en los códigos actuales de análisis y diseño, *e.g.*, ACI-318, Eurocódigo y las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto NTCDCEC-2004. En particular, los coeficientes de diseño de las NTCDCEC-2004, se derivan de los presentados en el código ACI 318-63 (González, 2011), los cuales se basan en el trabajo de Newmark y Siess (1950).

1.3 Evolución de los métodos de análisis y diseño de losas

1.3.1 Problema de valores en la frontera

Una losa se puede idealizar como una placa, la cual es un elemento estructural limitado por dos planos paralelos, llamados caras, y una superficie cilíndrica, llamada borde o frontera. Su estudio se divide en: gruesas, placas de Reissner-Mindlin, y delgadas, placas de Kirchhoff.

La teoría de placas a flexión considera un continuo en 2D que corresponde a la superficie media de una placa con espesor, t , definida en un dominio abierto, $A \in \mathbb{R}^2$, puntos materiales, \mathbf{x} , y frontera, Γ , (figura 1.1). Las condiciones prescritas en la frontera son: la carga vertical por unidad de área, q , en A , la carga transversal V^* , sobre Γ_V , el momento flexionante, M^* , sobre Γ_M , el desplazamiento transversal, w^* , en Γ_w , y la rotación θ^* , en Γ_θ .

La cinemática de deformación de placas asume que los puntos materiales de la placa localizados originalmente en una línea recta, normal a la superficie no deformada, se mantienen en línea recta durante la deformación, pero no necesariamente normal a la superficie media deformada (figura 1.2). Las partículas de la superficie media, $z=0$, sujetas a flexión, sufren una deflexión $w(x,y)$, en z .

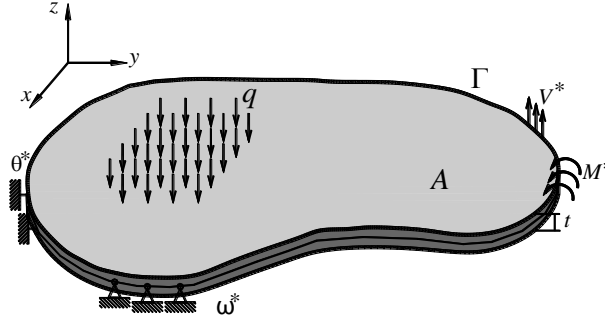


Figura 1.1. Placa con condiciones en la frontera sobre Γ

En el caso de deformaciones pequeñas las rotaciones son:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Las componentes de desplazamiento en un punto con coordenadas x, y, z son, en desplazamientos pequeños:

$$u = -z\theta_x(x, y), v = -z\theta_y(x, y) \text{ y } w = w(x, y) \quad (1.1)$$

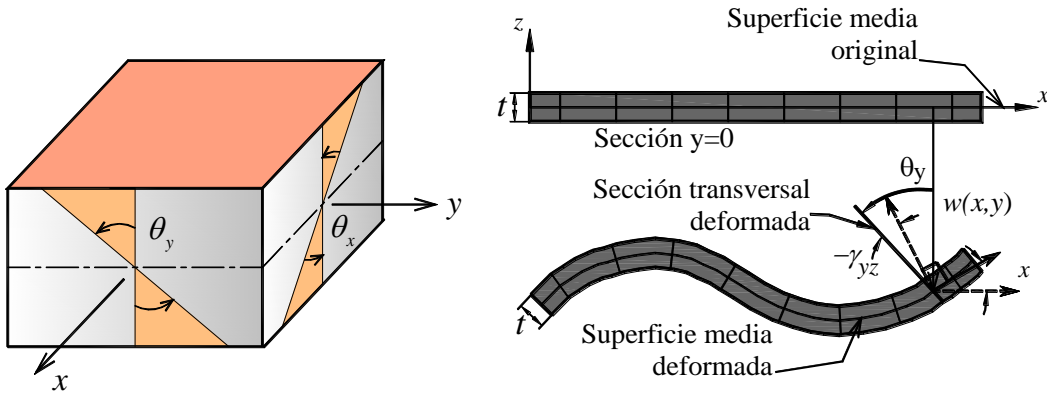


Figura 1.2. Cinemática de deformación de una placa

o en forma vectorial

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\theta_x \\ -z\theta_y \\ \omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\theta \\ \omega \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

donde ω es el desplazamiento transversal; θ_x es la rotación en x y θ_y la rotación en y de la normal a la superficie media no deformada.

El problema de una placa se define por las siguientes ecuaciones y condiciones en la frontera:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \mathbf{k}(x, t) - \mathbf{k}^\theta(x, t) = 0 & \text{en } A & \quad \text{Compatibilidad cinemática} \\ & \gamma(x, t) - \gamma^{\omega, \theta}(x, t) = 0 \\ \text{b)} \quad & \mathbf{M}(x, t) - \mathbf{M}^k(x, t) = 0 & \text{en } A & \quad \text{Compatibilidad constitutiva} \\ & \mathbf{V}(x, t) - \mathbf{V}^\gamma(x, t) = 0 \\ \text{c)} \quad & \mathbf{L}^T \mathbf{M}(x, t) + \mathbf{V}(x, t) = 0 & \text{en } A & \quad \text{Equilibrio interno} \\ & \nabla^T \mathbf{V}(x, t) - q_z(x, t) = 0 \\ \text{d)} \quad & \mathbf{M}(x, t)v - \mathbf{M}^*(x, t) = 0 & \text{en } \Gamma_M & \\ & \mathbf{V}(x, t)v - \mathbf{V}^*(x, t) = 0 & \text{en } \Gamma_V & \\ & \mathbf{M}(x, t)v - \mathbf{M}(x, t) = 0 & \text{en } \Gamma_\theta & \\ & \mathbf{V}(x, t)v - \mathbf{V}(x, t) = 0 & \text{en } \Gamma_\omega & \quad \text{Equilibrio externo} \\ \text{e)} \quad & \boldsymbol{\theta}(x, t) = \boldsymbol{\theta}^*(x, t) & \text{en } \Gamma_\theta & \\ & \omega(x, t) = \omega^*(x, t) & \text{en } \Gamma_\omega & \quad \text{Condición esencial} \end{aligned} \quad (1.3)$$

La ecuación (1.3) en el inciso a, corresponde a la compatibilidad cinemática entre la curvatura, \mathbf{k}^θ , y las deformaciones por cortante $\gamma^{\omega, \theta}$, con rotaciones $\boldsymbol{\theta}$, el desplazamiento transversal, ω , se define como:

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ 2k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

$$\mathbf{k}^\theta = \mathbf{L}\boldsymbol{\theta}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \{\omega\} - \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{\omega, \theta} = \nabla \omega - \boldsymbol{\theta}$$

La curvatura \mathbf{k}^θ , y las deformaciones por cortante, $\boldsymbol{\gamma}^{\omega, \theta}$, definen las medidas de deformación de la teoría de placas dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Z} \begin{Bmatrix} \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} -z\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

donde \mathbf{I} y $\mathbf{1}$, son respectivamente los tensores de identidad de cuarto y segundo orden.

Las ecuaciones (1.3) en el inciso b, corresponden a la compatibilidad constitutiva entre el momento, \mathbf{M}^k , y la curvatura,

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ 2k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{M}^k = \mathbf{D}_b \mathbf{k}^\theta$$

así, como la fuerza cortante \mathbf{V}^γ , y la deformación por cortante definidas como:

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \frac{Et\kappa}{2(1+\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{V}^\gamma = \mathbf{D}_s \boldsymbol{\gamma}^{\omega, \theta}$$

considerando los tensores constitutivos elástico-lineales para flexión y cortante

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_b &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} [(1-\nu)\mathbf{I} + \nu \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] \\ \mathbf{D}_s &= \frac{Et\kappa}{2(1+\nu^2)} \mathbf{1} \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde E es el modulo elástico, ν la relación de Poisson y κ el factor de forma por cortante.

En las ecuaciones (1.3) en el inciso c, q_z incluye la contribución de la carga transversal, p_z y la fuerza de cuerpo b_z .

$$q_z = (p_z + tb_z) \quad (1.10)$$

La fuerza normal \mathbf{N} , el momento \mathbf{M} , y la fuerza cortante transversal \mathbf{V} se relacionan con los esfuerzos, $\boldsymbol{\sigma}$, mediante las siguientes relaciones:

$$\mathbf{N} = \int_{-t/2}^{t/2} \boldsymbol{\sigma} dz \begin{cases} N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz \\ N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz \\ N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \end{cases} \quad (1.11)$$

$$\mathbf{M} = - \int_{-t/2}^{t/2} \boldsymbol{\sigma} z dz \begin{cases} M_x = - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \\ M_y = - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \\ M_{xy} = - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{V} = \int_{-t/2}^{t/2} \boldsymbol{\tau} dz \begin{cases} V_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \\ V_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz \end{cases} \quad (1.13)$$

Se observa que los elementos mecánicos en placas presentan la misma naturaleza que los tratados en vigas.

1.4 Discusión

Es importante señalar que la teoría elástica de placas es la base de las investigaciones y aplicaciones que se realizan en el análisis y diseño de losas rectangulares actualmente. Sin embargo, ante la necesidad de geometrías irregulares de losas, esta teoría presenta ciertas limitaciones. Situación que requiere de la utilización de modelos numéricos que proporcionen una buena aproximación en la obtención de resultados para el análisis y diseño.

Los códigos actuales de diseño presentan metodologías similares de análisis y diseño de losas rectangulares mediante coeficientes. Sin embargo, dichos métodos tienen una limitante en común: que sólo aplican a losas con geometría rectangular.

En particular, las Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto (NTCDCEC-2004), se basan en el diseño mediante coeficientes para losas rectangulares que proporciona el método de Newmark y Siess (1950), y a su vez modificados por factores empíricos (González, 2011). Situación que requiere de recomendaciones de análisis y diseño para losas con geometrías irregulares.

1.5 Objetivos

1.5.1 General

El objetivo general de esta tesis es desarrollar los criterios de análisis y diseño de losas con geometría circular, triangular y elipsoidal en condición aislada, considerando la condición colada monolíticamente con las vigas, empotrada, y no monolíticamente, simplemente apoyada.

1.6 Metas

Las metas de esta tesis son:

1. Contar con un catálogo de coeficientes de diseño.
2. Conocer las trayectorias de agrietamiento.
3. Desarrollar criterios de diseño para el armado con base en las trayectorias de agrietamiento y distribución de momentos.

1.7 Organización de la tesis

La organización de esta tesis se presenta en cuatro capítulos:

- El *Capítulo 1* presenta una breve historia del uso de las losas. Además, se introducen los motivos que dan lugar al presente trabajo, y el delineamiento del contenido de la tesis.
- En el *Capítulo 2* se discuten los métodos analíticos para determinar la carga de colapso en losas.
- En el *Capítulo 3* se calibra, con ayuda de un modelo experimental reportado de la literatura, un modelo numérico para estimar la respuesta de losas rectangulares sujetas a carga por unidad de área. Se realiza este modelo con el fin de validar un procedimiento de análisis que permita determinar la respuesta de losas no rectangulares.
- El *Capítulo 4* presenta el análisis de losas no rectangulares. Para este análisis se utiliza el procedimiento validado que se basa en el capítulo anterior. Se muestra la obtención de los coeficientes de diseño y se obtienen las trayectorias de agrietamiento para validar la ubicación de los armados de las losas en estudio.
- Finalmente, se presentan las conclusiones y recomendaciones derivadas de esta tesis.

Capítulo 2

MÉTODOS PARA DETERMINAR LA CARGA DE COLAPSO

2.1 Teoría de análisis límite

Las teorías de análisis límite pueden llevar a una ó a distintas cargas de colapso; la teoría límite inferior ciertamente es más segura con respecto a la del límite superior y usualmente es más rápida. Ambos enfoques satisfacen la condición de equilibrio, pero la aproximación de límite superior ignora los requisitos de cedencia, mientras que la técnica del límite inferior no requiere la especificación de un mecanismo de colapso.

2.1.1 Método del límite superior

El método del límite superior puede establecer un mecanismo de colapso que involucra inseguridad en la capacidad de carga de la losa, en momentos tales que no exceden el momento plástico completamente. Por otra parte, el método del límite inferior puede establecer distribución de momentos que son seguros, pero que no corresponden a un mecanismo de colapso.

El enfoque tradicional de análisis de líneas de fluencia (Johanson, 1964) requiere la especificación de un mecanismo potencial para el cual se calcula una carga de colapso. Esta estimación es un límite superior de la carga de colapso real. Subsecuentemente, los mecanismos de prueba que resulten para una carga de colapso menor, se toman como un valor exacto.

Johnson (2006) realizó estudios para investigar el efecto de la variación geométrica de una línea de fluencia determinada con el fin de refinar el cálculo. Este refinamiento resultó en reducciones insignificantes en las cargas de colapso en intervalos de 10 y 15 %.

2.1.2 Método del límite inferior

Este método asume que las franjas utilizadas para el análisis presentan valores de la fuerza cortante igual a cero para permitir una distribución de momentos de equilibrio que proporcione una solución segura, si se diseñan losas con ubicaciones de refuerzo. Johnson (2006) realizó un enfoque automatizado para la obtención de soluciones de límite inferior.

En resumen, el enfoque de análisis de líneas de fluencia puede llevar a aproximaciones inseguras si el mecanismo crítico no se examina adecuadamente. Por lo tanto, este enfoque sólo es razonablemente confiable en el caso de existencia de losas convencionales y cargas para las cuales las líneas críticas de fluencia han sido fiablemente establecidas.

Los análisis de líneas de fluencia en general serán más confiables en la identificación de mecanismos críticos, pero involucra, un proceso complicado que puede presentar incertidumbre en el lado no seguro.

El método de las franjas (límite inferior) dará lugar a diseños seguros, pero puede producir conservadurismo de hasta un 20-30% si se aplica a configuraciones y cargas complejas.

El método del límite inferior tiene la virtud primordial de garantizar una solución segura y es también un análisis de una sola etapa, sin necesidad de intervención manual. Tal vez sea un poco menos intuitivo que el método de líneas de fluencia, ya que, por su naturaleza, no ofrece llegar a la cedencia en la línea en estudio. Sin embargo, se puede generar un gráfico del modo de colapso asociado.

2.2 Mecánica numérica

2.2.1 Modelado del concreto

En mecánica numérica se simula el mecanismo de colapso mediante aproximaciones como: mecánica de fractura, plasticidad, daño, discontinuidades interiores y agrietamiento distribuido. Esta última ha tenido popularidad en el análisis de estructuras de concreto mediante elementos finitos, la cual fue introducida por Rashid (1968); en ella se representa la pérdida de rigidez del material como un conjunto de grietas paralelas entre sí distribuidas sobre un elemento finito (figura 2.1). Lo anterior se puede simular convenientemente al reducir la rigidez y resistencia del material en la dirección normal a las grietas después de alcanzar la resistencia última del material. La evolución del proceso de falla de una estructura involucra el ablandamiento, que se refiere al decrecimiento de los esfuerzos y un incremento de las deformaciones gradualmente.

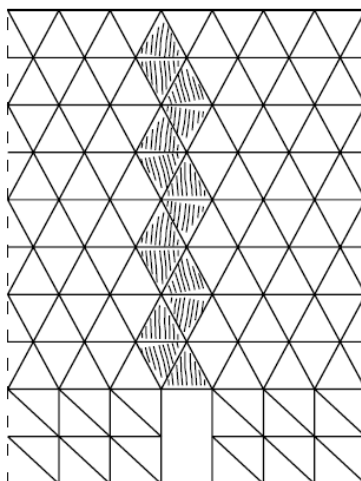


Figura 2.1. Modelo de agrietamiento distribuido

Existen tres aproximaciones para la simulación del agrietamiento del concreto basados en el modelo de Grieta Distribuida (Rots, 1988): grieta fija, grieta fija multidireccional y grieta giratoria. El modelo de grieta fija considera la formación de una grieta perpendicular a la dirección del esfuerzo principal máximo, cuando el esfuerzo principal es igual que la resistencia a tensión última del material, la orientación de la grieta permanece constante durante el análisis. En el modelo de grieta fija multidireccional consideran que se pueden formar múltiples grietas cuya orientación individual se mantiene fija durante todo el análisis computacional. El modelo de grieta giratoria, propuesta por Cope *et al.* (1980), considera que la grieta gira de acuerdo con la dirección de la deformación principal durante el proceso de carga, a diferencia del modelo de grieta fija.

En general, la ventaja principal del modelo de agrietamiento distribuido es que no necesita remallado durante el proceso de simulación del proceso de la falla. Sin embargo, cuando se presenta ablandamiento de deformaciones en el análisis, el modelo de agrietamiento distribuido presenta dificultades que en principio eran desconocidas o no se apreciaban. Éstas consisten en:

- 1) Dependencia de la malla. Los resultados son afectados por el tamaño y la orientación de los elementos, este efecto puede reducirse utilizando mallas finas;
- 2) Modos cinemáticos falsos. Producidos por la falta de convergencia en el análisis; y
- 3) Atoramiento de los esfuerzos. Fenómeno que ocurre como consecuencia de la compatibilidad de desplazamientos entre elementos y de que la grieta no está alineada con un borde del elemento finito que la contiene. En consecuencia, el elemento en el interior de la banda de ablandamiento impone deformaciones a los elementos vecinos; si los elementos vecinos limitan dichas deformaciones, se produce un atoramiento de los esfuerzos en el interior y no llega a descargarse la banda por el ablandamiento.

2.2.1.1 Corrimiento

El modelado de adherencia en elementos de concreto reforzado mediante el método de elementos finitos requiere considerar una zona de adherencia que representa el comportamiento del concreto y el acero de refuerzo en las inmediaciones de la interface. Investigaciones previas han sugerido que esta representación se logra mediante la introducción de un elemento de interfaz que tiene cero de ancho y una longitud finita como se muestra en la figura 2.2.

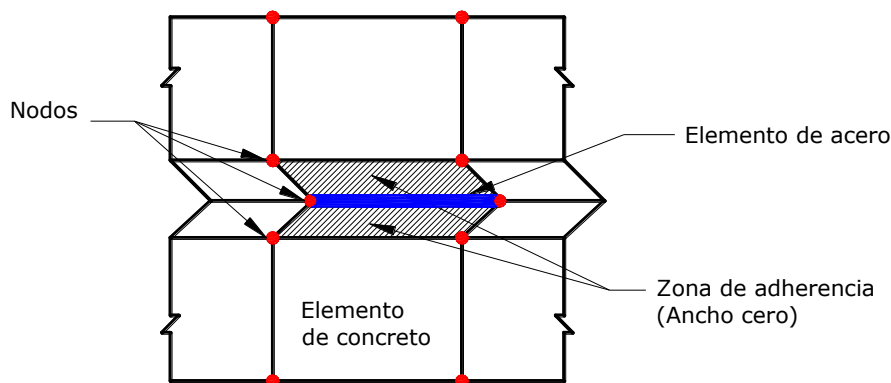


Figura 2.2. Mallado de elemento finito en la zona de adherencia

A pesar de que la adherencia es un aspecto importante en el dimensionamiento de elementos de concreto reforzado el conocimiento sobre este fenómeno es relativamente escaso, especialmente en lo que se refiere a la determinación de los esfuerzos internos y a los mecanismos de falla por adherencia. Por lo anterior, en esta tesis se consideró adherencia perfecta entre el acero y el concreto.

2.2.1.2 Plasticidad

La plasticidad es una de las propiedades mecánicas de un material donde aparecen deformaciones permanentes e irreversibles. En el cálculo de estructuras de concreto se admite que las barras de acero adquieran deformaciones plásticas, ya que el acero tiene un comportamiento plástico con endurecimiento.

Particularmente en el acero, la plasticidad frecuentemente se relaciona con el desplazamiento de dislocaciones en el interior del material. A partir de un cierto valor de la tensión esas dislocaciones sufren desplazamientos, que constituyen transformaciones irreversibles que absorben energía y cuyas deformaciones asociadas no se recuperan cuando desaparece el esfuerzo.

La descripción del comportamiento del acero se realiza utilizando dos criterios comunes de superficies de fluencia: Tresca y Von Mises. En esta tesis se utiliza el segundo criterio ya que representa un refinamiento del criterio de Tresca al incluir un criterio de máxima energía de distorsión y que se representa en función de los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 , así como un modelo constitutivo bilineal en función del esfuerzo de fluencia σ_y (figura 2.3).

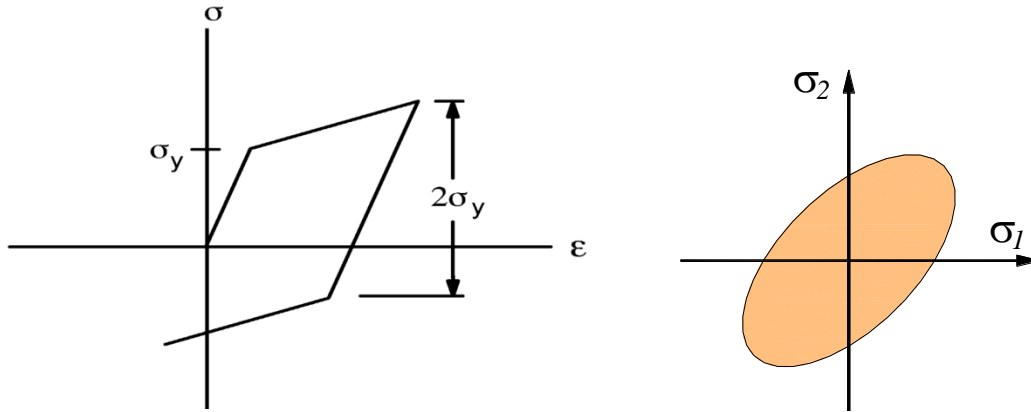


Figura 2.3. Modelo constitutivo bilineal y superficie de fluencia de Von Mises

2.3 Discusión de los métodos para determinar la carga de colapso

Algunos métodos para determinar cargas de colapso, como es el caso de métodos que se basan en el concepto de balance de energías, presenta ciertas limitaciones al encontrar cargas en el rango inelástico ya que carecen de una buena aproximación. Sin embargo, con la mecánica numérica se pueden obtener resultados de mejor aproximación, tal como se muestra en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

SIMULACION NUMERICA

3.1 Calibración numérica para simular losas

3.1.1 Introducción

El modelado numérico es una herramienta para determinar el estado de esfuerzos, la configuración de desplazamientos de determinada estructura y en particular, para demostrar que los modelos analíticos utilizados en esta tesis presentan soluciones aceptables. Se presenta a continuación una comparación con un modelo experimental reportado de la literatura.

3.1.2 Descripción de experimento en laboratorio

La obtención de parámetros que validen métodos congruentes de análisis y diseño de losas de concreto reforzado apoyadas en su perímetro es importante para evaluar la capacidad real del sistema. Centros de investigación y universidades han realizado pruebas experimentales; la Universidad de Illinois publicó resultados de pruebas experimentales enfocadas a estudiar la influencia de las fuerzas en el plano en la capacidad de carga a flexión y desarrollar un método simple para determinar la resistencia de losas sometidas a dicha condición (Girolami *et al.*, 1970). Se realizó el ensaye de seis especímenes de prueba, que fueron instrumentadas y probadas. Las losas de prueba presentaban dimensiones de 1.829x1.829 m y un peralte de 0.044 m (figura 3.1), las cuales se reforzaron de acero con esfuerzo de fluencia de 3377.76 kgf/cm² y una resistencia a compresión del concreto aproximadamente de 316.6 kgf/cm².

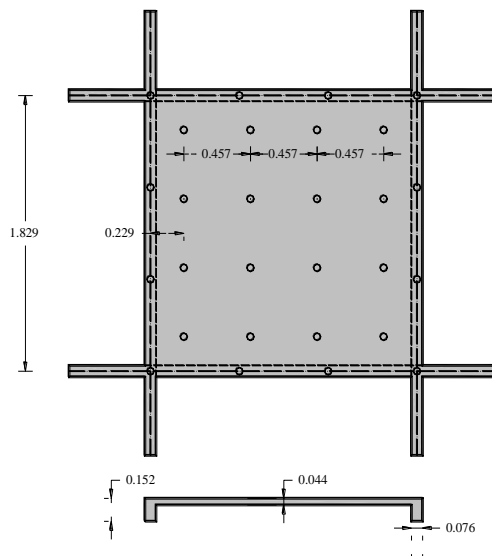


Figura 3.1. Dimensiones de especímenes de prueba

El sistema de losa y vigas perimetrales contienen acero negativo y positivo para soportar una carga uniformemente distribuida de 733 kgf/m^2 . Tres de estas losas estaban apoyadas sólo en las esquinas y las otras estaban soportadas en más puntos a lo largo de la viga.

La carga vertical fue colocada en dieciséis puntos para simular una carga uniformemente distribuida (figura 3.2). Además, se colocaron ocho cargas en las vigas en voladizo para obtener una cierta restricción en las esquinas.

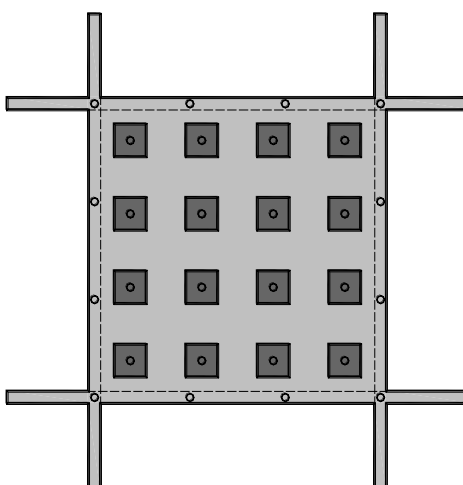


Figura 3.2. Modo de aplicación de carga vertical

3.1.2.1 Elección del espécimen de prueba

De las pruebas antes mencionadas, se utilizó un espécimen como el que muestra la figura 3.1 el cual se encontraba apoyado en la intersección entre las vigas de soporte y sometido sólo a carga vertical, sin considerar la carga horizontal aplicada al resto de los especímenes. La figura 3.3 muestra las características del acero en el sistema de losa y vigas.

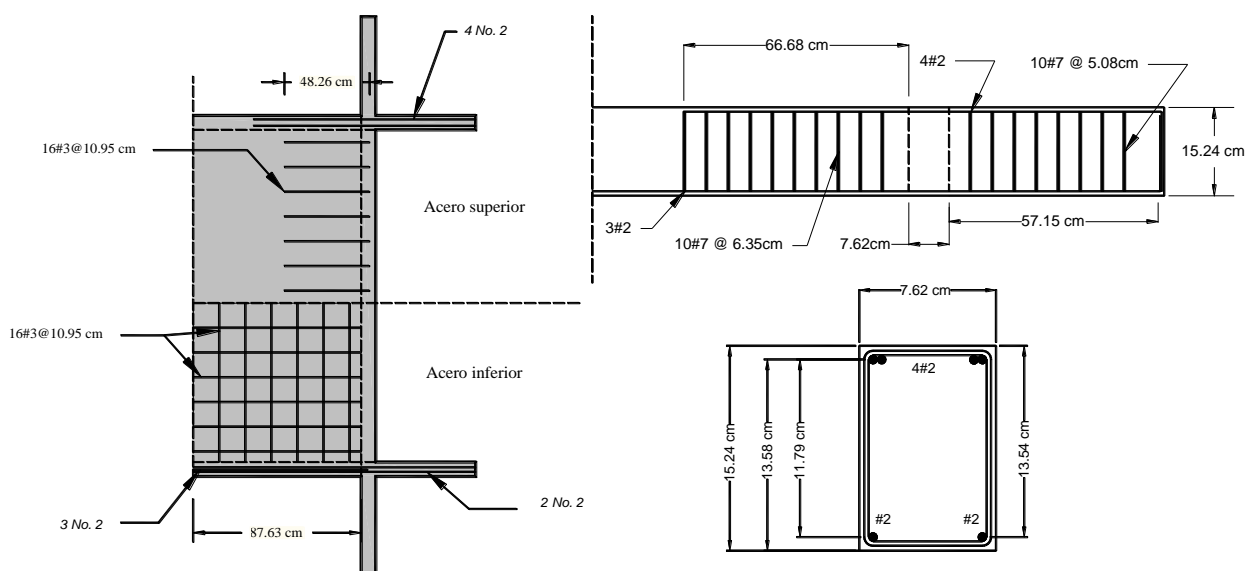


Figura 3.3. Distribución de acero de refuerzo del espécimen de prueba en estudio

3.1.3 Modelado numérico

El modelado numérico se realizó mediante los tres pasos siguientes: a) modelado sólo de una cuarta parte del espécimen con sus respectivas fronteras que limitan el dominio del sistema como se muestra en la figura 3.4, b) definición del mallado de elementos línea y sólidos cuadriláteros y aplicación de cargas incrementales para llevar el modelo a un determinado estado de daño y c) visualización de resultados.

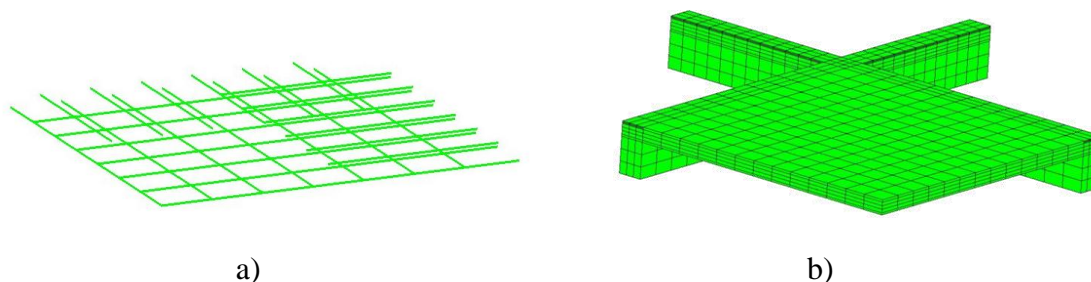


Figura 3.4. Malla de elementos finitos: a) acero de refuerzo y b) concreto simple

La Tabla 1 muestra una comparación entre las cargas de agrietamiento obtenidas tanto del modelo experimental (Girolami *et al.*, 1970) como del numérico. Se observa una aproximación razonable por parte del modelo numérico.

Tabla 1. Carga de agrietamiento en modelo experimental y numérico

Carga de agrietamiento(KN)		
Modelo	Superficie	
	Superior	Inferior
Experimental	57.7	88.80
Numérico	55	86.32

3.1.4 Comparación de resultados

En la figura 3.5 se muestra la curva carga contra desplazamiento en el centro del espécimen; se comparan los resultados analíticos y los experimentales.

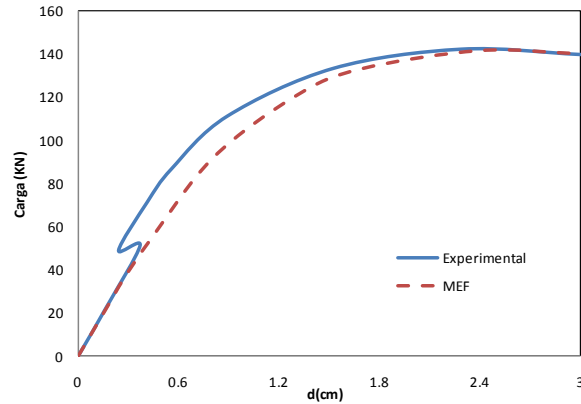
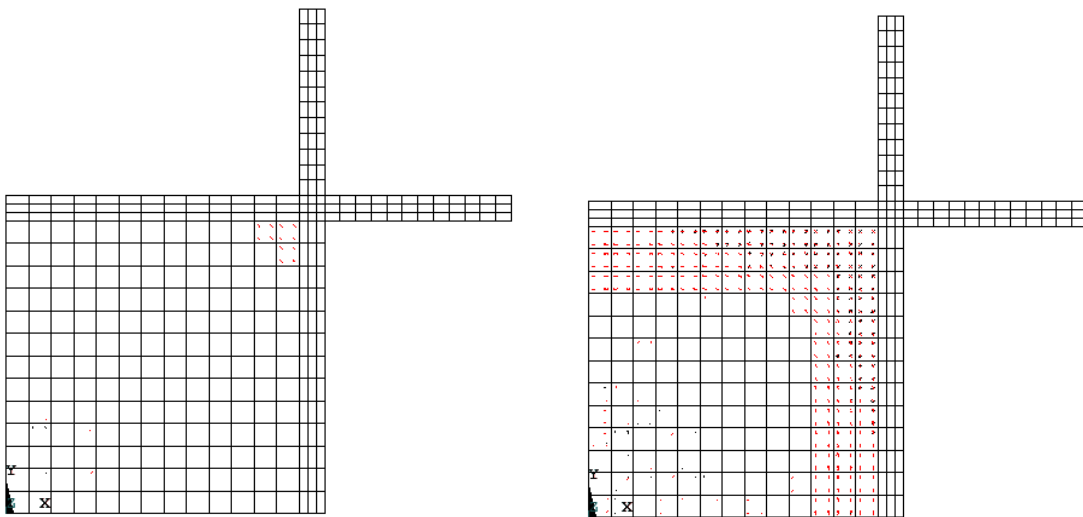


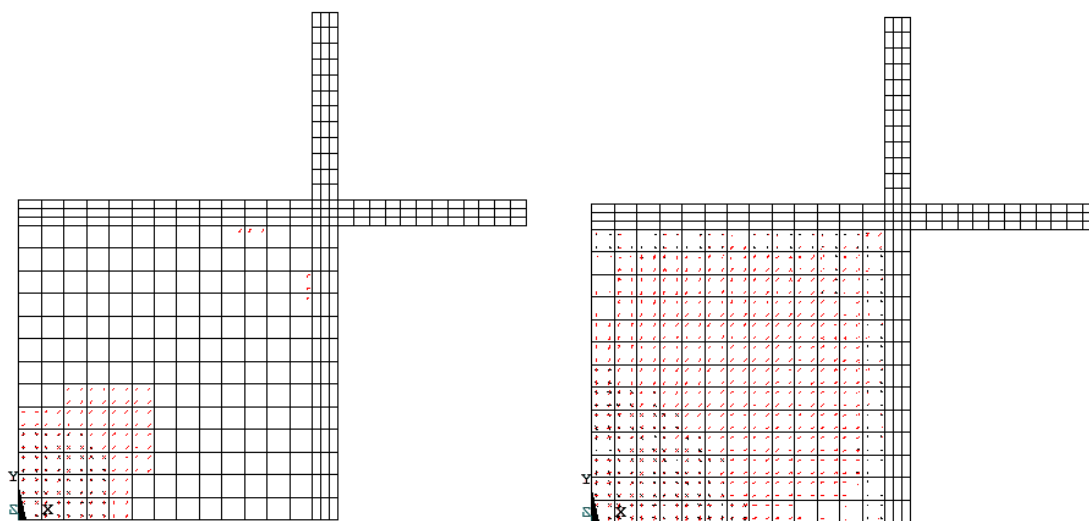
Figura 3.5. Comparacion entre curva experimental y analítica

Se observa que las dos curvas presentan igual comportamiento en el intervalo elástico; mientras que en el rango inelástico se observa que el desplazamiento se recupera al aumentar la carga en el experimento, el cual se supone que en realidad se presentó un corrimiento en los instrumentos de medición del experimento, concluyendo que la forma de modelado propuesta es correcta para los experimentos numéricos realizados en esta tesis.

El experimento muestra que el agrietamiento inicia en la parte superior de la losa y se propaga hacia los bordes; y conforme aumenta la carga, inicia el agrietamiento en la parte inferior de la losa en el centro del claro. Por lo tanto, al comparar lo anterior con los esquemas de agrietamiento que muestra la figura 3.6, se observa que los valores obtenidos son consistentes con el modelo experimental.



a)



b)

Figura 3.6. Evolución gradual del agrietamiento: a) parte superior y b) parte inferior

3.2 Simulación numérica

3.2.1 Introducción

En este capítulo se presenta el modelado de losas elásticas con secciones triangular equilátera, circular y elíptica, el cual se realizó con el software de análisis estructural SAP2000 *Advanced* (CSI, 2004); se utilizaron elementos finitos placa y se compararon las soluciones numéricas con sus respectivas soluciones exactas; con la distribución de momentos se propone la distribución del acero. Además se presentan los análisis no lineales los cuales se realizaron con el software Ansys 12.0.1 (Ansys, 2009), modelando el concreto con elementos sólidos y el acero con elementos unidimensionales; con estos análisis se obtiene la redistribución de momentos debida a la no linealidad y las trayectorias de agrietamiento de los modelos.

Se propuso un espesor de 10 cm en el modelado de las losas, semejante al que comúnmente se utiliza en la práctica profesional. En la Tabla 2 se hace una revisión del espesor con base en los requerimientos de las NTCDCEC-2004.

Tabla 2. Revisión de espesores utilizados en modelos numéricos.

Espesores				
Geometría	Perímetro (m)	Espesor mínimo NTC-2004 (cm)		Espesor (cm)
		Monolítico	No monolítico	
Circular	12.57	6.28	7.54	10
Triangular	13.85	6.93	8.31	10
Elíptica	9.69	4.84	5.81	10
	10.21	5.11	6.13	10
	10.76	5.38	6.46	10
	11.34	5.67	6.81	10
	11.95	5.97	7.17	10

La obtención de coeficientes se realiza mediante la siguiente ecuación:

$$\alpha = \frac{M}{wa^2} \quad (3.1)$$

donde:

α = Coeficiente de diseño

w = Carga por unidad de área

a = Longitud del claro menor

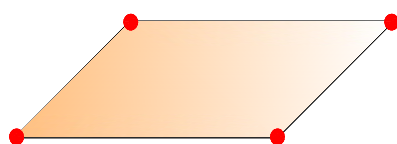
M = Momento actuante en un punto o zona del sistema

3.2.2 Análisis elástico

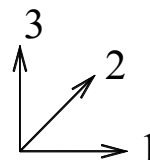
El análisis elástico de las losas triangular, circular y elíptica de concreto reforzado se realizó aplicando una carga distribuida de 1000 kgf/m^2 , considerando el material homogéneo e isotrópico con módulo elástico $E=2.2 \times 10^9 \text{ kgf/m}^2$ y relación de Poisson $\nu=0.2$.

3.2.2.1 Consideraciones en el mallado

En el caso del análisis elástico se utilizó un mallado compuesto por elementos placa (figura 3.7) con geometría rectangular. Pues el uso de este tipo de elementos es práctico para obtener una aproximación de momentos flexionantes.



a)



b)

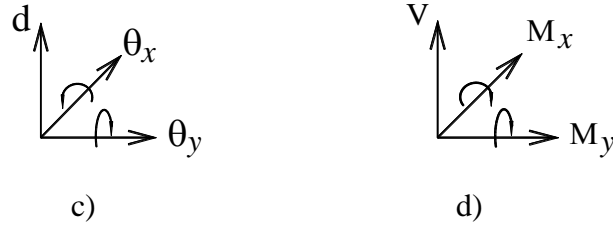


Figura 3.7. Elementos placa donde: a) elemento finito, b) grados de libertad, c) desplazamientos y d) elementos mecánicos

3.2.2.2 Losas triangulares

La obtención de coeficientes de diseño elásticos de la sección triangular se realizó mediante cuatro modelos numéricos, los cuales presentan cambios tanto en dimensión como en tipo de apoyo. La figura 3.8 muestra la geometría de esta sección y la Tabla 3 muestra las características de los modelos donde a es la altura del triángulo.

Tabla 3. Características físicas de placas elásticas triangulares.

Condición	Descripción	a (m)
Apoyo simple	Modelo 1	1
	Modelo 2	4
Apoyo empotrado	Modelo 3	1
	Modelo 4	4

En la Tabla 3 se observa que se utilizan valores de $a=1\text{m}$ y $a=4\text{m}$, esto se debe a la necesidad de verificar la influencia del cambio de longitud en el coeficiente. Los modelos numéricos se resolvieron utilizando el Método de Elementos Finitos (MEF) como método de aproximación, cuyas soluciones numéricas se compararon, cuando fue posible con soluciones derivadas de la teoría de la elasticidad.

Las ecuaciones (3.2) y (3.3) muestran la solución exacta de momentos para el caso de una losa triangular simplemente apoyada (Woinowsky-Krieger, 1933), la cual está sujeta a una carga distribuida ω . La figura 3.8a muestra el sistema coordenado de referencia donde “o” es el centro de coordenadas que se localiza en una distancia de $a/3$ y la figura 3.8b muestra la mitad de la malla de elementos finitos placa.

$$M_x(x, y) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.2)$$

$$M_y(x, y) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.3)$$

el desplazamiento transversal es:

$$w(x, y) = \frac{\omega}{64aD} \left[x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27}a^3 \right] \left(\frac{4}{9}a^2 - x^2 - y^2 \right) \quad (3.4)$$

donde a es la altura del triángulo, x y y son las coordenadas y D la rigidez a flexión dada por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.5)$$

la cual depende del Módulo elástico E , relación de Poisson ν y el peralte de la losa h

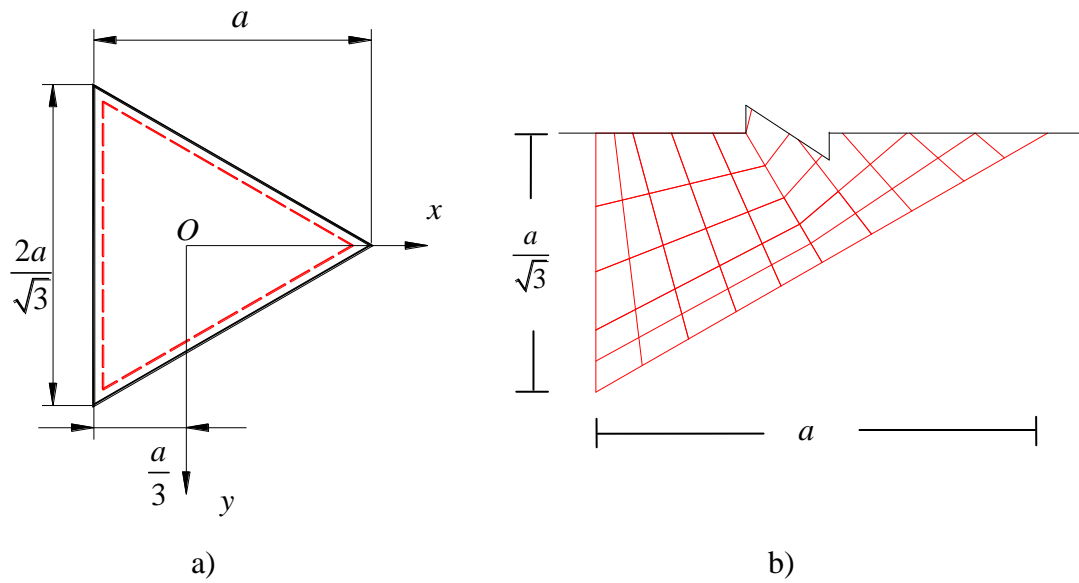


Figura 3.8. Estudio de losas triangulares: a) sistema de referencia y b) mallados de elementos finitos placa

En la figura 3.9a se muestran los coeficientes obtenidos a lo largo del eje x del modelo con la solución exacta y con el MEF (figura 3.8) de la placa simplemente apoyada, debido a que dicho eje representa la zona de momentos máximos para un triángulo equilátero. En la figura 3.9b se muestran los coeficientes para la condición de empotramiento donde sólo se obtuvo la solución numérica, pues no se encontró en la literatura una solución exacta.

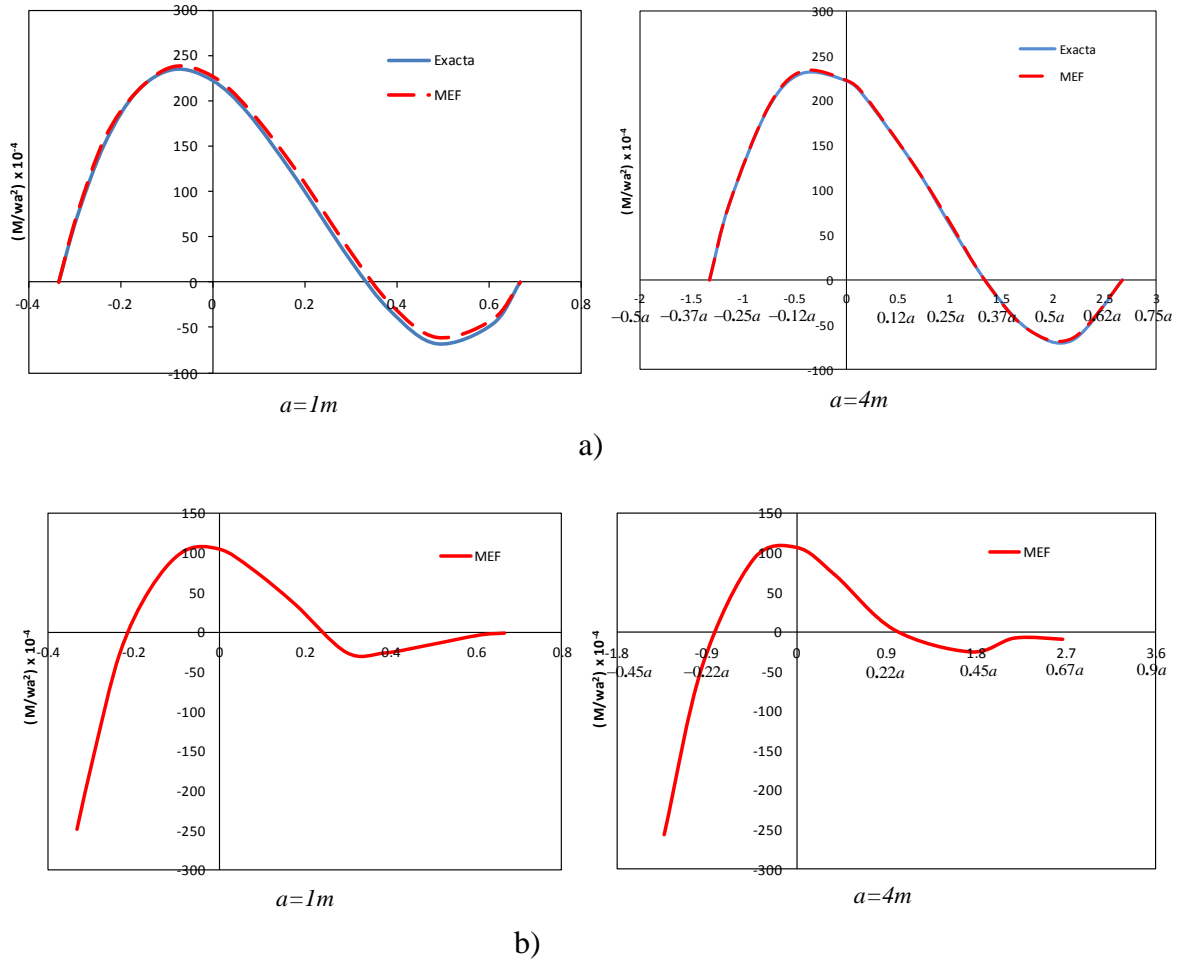


Figura 3.9. Coeficientes en dirección x sobre el eje en placas triangulares con: a) apoyos simples y b) apoyos empotrados

Con el análisis de la losa triangular empotrada se obtiene una configuración de la distribución de momentos actuantes máximos tanto en el sentido transversal (figura 3.10a) como longitudinal (figura 3.10b). Además, se obtiene las zonas que limitan los momentos positivos y negativos, lo cual es de utilidad para proponer la ubicación del acero de refuerzo.

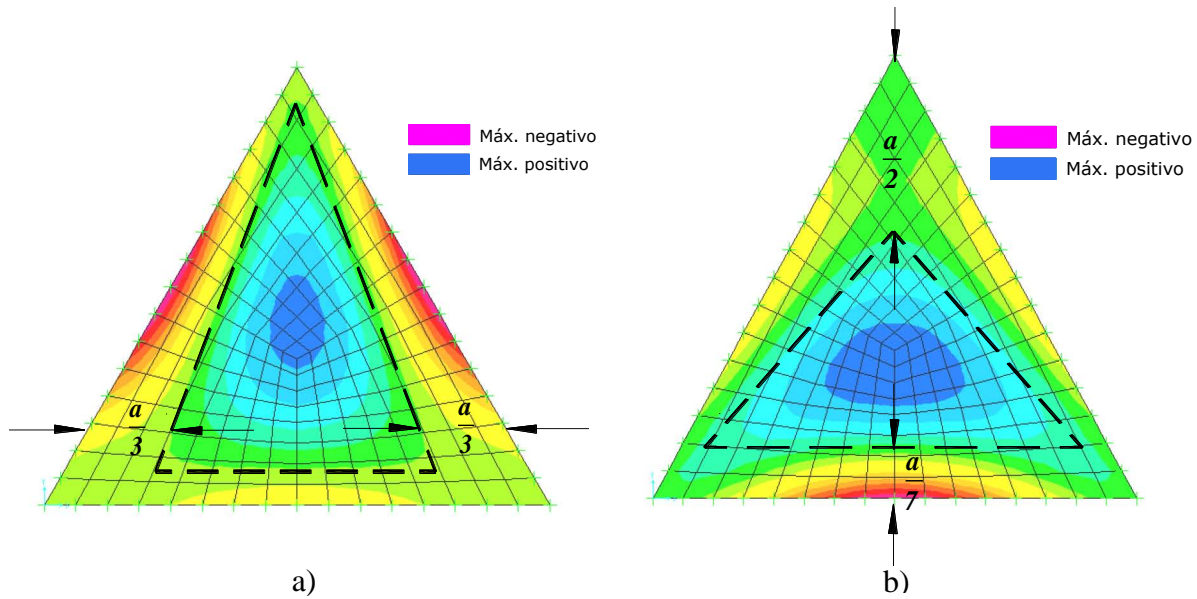


Figura 3.10. Distribución de momentos flexionantes típica en placas triangulares empotradas en los apoyos en sentido: a) transversal y b) longitudinal

En la figura 3.11 se muestra un esquema del acero de refuerzo propuesto en función de los momentos máximos positivos (figura 3.11a) y negativos (figura 3.11b). Esto permite proponer el armado para la losa triangular con $a=4\text{m}$ que posteriormente se analiza en esta tesis.

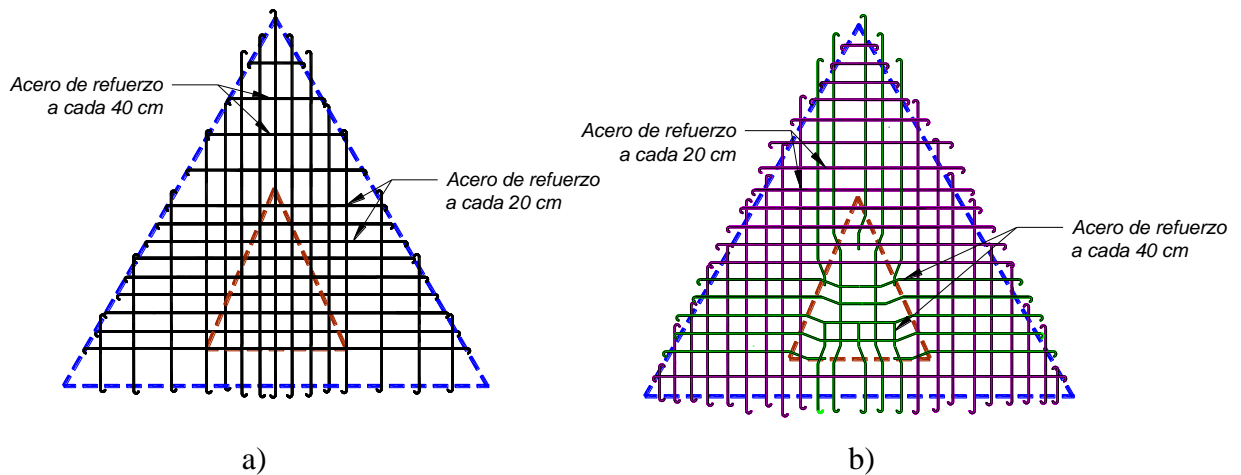


Figura 3.11. Propuesta del acero de refuerzo en placas triangulares donde: a) refuerzo positivo y b) refuerzo negativo

3.2.2.3 Losas circulares

La obtención de coeficientes elásticos para una sección circular se realizó mediante cuatro modelos numéricos, los cuales presentan cambios tanto en dimensión como en tipo de apoyo. La Tabla 4 muestra las propiedades y características de los modelos.

Tabla 4. Características físicas de placas circulares elásticas.

Condición	Descripción	r (m)
Apoyo simple	Modelo 1	1
	Modelo 2	2
Apoyo empotrado	Modelo 3	1
	Modelo 4	2

La figura 3.12 muestra la malla de elementos finitos placa utilizada en la obtención de las soluciones numéricas con el fin de comparar con la solución exacta y validar estos métodos de solución para obtener una distribución de momentos de aproximación razonable.

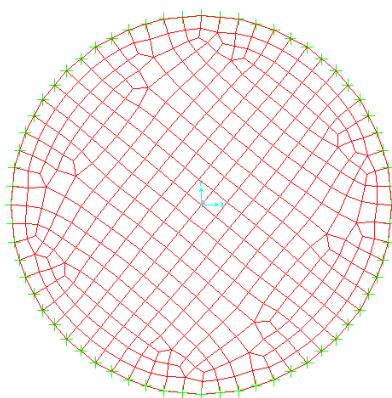


Figura 3.12. Modelo de elementos finitos general para placa circular

La obtención de coeficientes elásticos exactos para placas circulares de espesor h se realizó a través del estado de momentos que se describe en coordenadas polares y que tiene como referencia el centro del círculo, ver figura 3.13. Las ecuaciones (3.6) a (3.9) muestran la solución exacta (Timoshenko y Woinoswky-Krieger, 1959) de los momentos radiales, M_r , y de los momentos tangenciales, M_t .

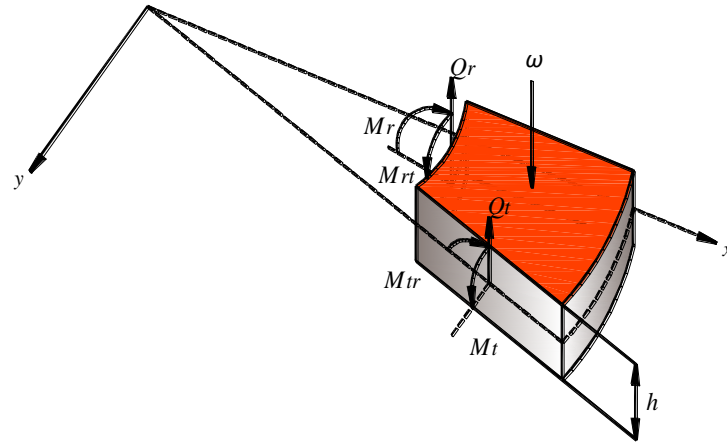


Figura 3.13. Estado de momentos y cortantes en un elemento diferencial de espesor h

Solución de momentos en una placa elástica circular simplemente apoyada

$$M_r(r) = \frac{\omega}{16}(3+\nu)(a^2 - r^2) \quad (3.6)$$

$$M_t(r) = \frac{\omega}{16}[(3+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2] \quad (3.7)$$

Solución de momentos en una placa elástica circular empotrada

$$M_r(r) = \frac{\omega}{16}[(1+\nu)a^2 - (3+\nu)r^2] \quad (3.8)$$

$$M_t(r) = \frac{\omega}{16}[(1+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2] \quad (3.9)$$

donde:

M_r = Momento radial

M_t = Momento tangencial

ω = Carga por unidad de área

a = Radio de placa

ν = Módulo de Poisson

r = Distancia a partir del origen de coordenadas colocado en el centro del círculo.



Una vez obtenidos los coeficientes radiales y tangenciales de la teoría elástica, se compararon con los coeficientes numéricos sobre un eje del círculo como se muestra en la figura 3.14. Donde se observa que los coeficientes son mayores en el centro de las placas simplemente apoyadas y mínimas en el de las placas empotradas con distribución de momentos obtenida con el MEF, mostrado en la figura 3.15. Se identificaron las zonas de momento negativo, para definir la ubicación del acero de refuerzo, L_{neg} indica la zona que debe reforzarse en la parte superior de la losa, en este caso $L_{neg} = r/2$.

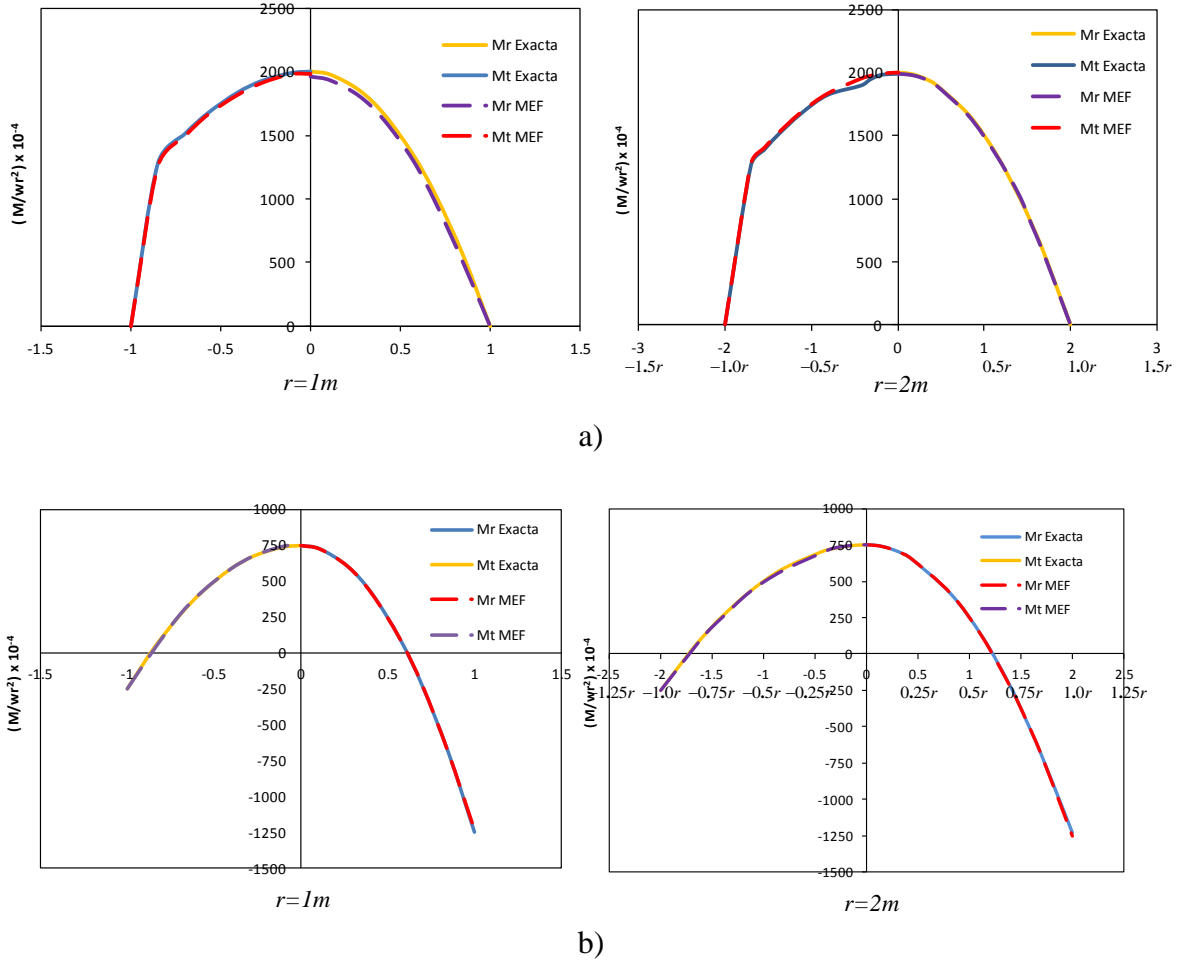


Figura 3.14. Comparación entre las dos formas de solución para placas circulares con:
a) apoyos simples y b) empotrados

000 v11.0.0 Advanced - Circulo_4m

Edit View Define Bridge Draw



Resultant MMAX Diagram (CV)

Analysis Model

Design Options Help

■ Máx. negativo
■ Máx. positivo

d xy xz yz nv

$$L_{neg} = \frac{r}{2}$$

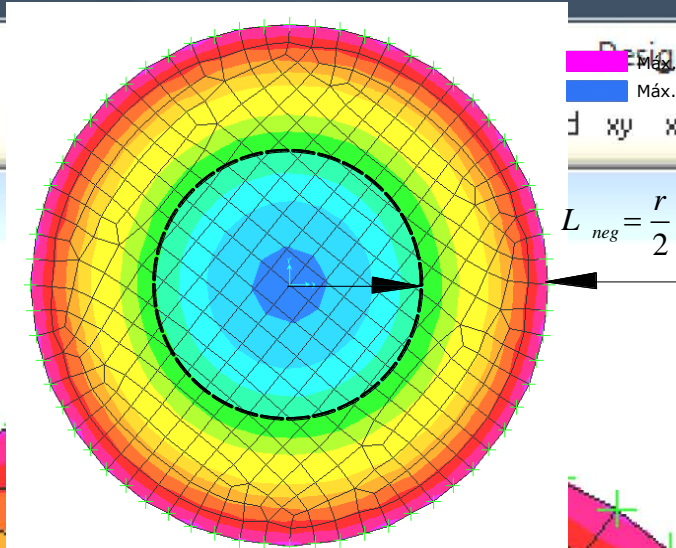


Figura 3.15. Distribución de momentos máximos en una losa circular empotrada en los apoyos

Al definir la zona de momento negativo, se propone una distribución básica del acero de refuerzo para la losa con radio $r=2\text{m}$ en la que todo el acero cruza el centro del círculo como se muestra en la figura 3.16. Esta configuración presenta dificultades en la construcción, por lo tanto, se propone una distribución ortogonal para un mejor análisis, detallado y aprovechamiento del acero de refuerzo en este tipo de losas como lo muestra la figura 3.17.

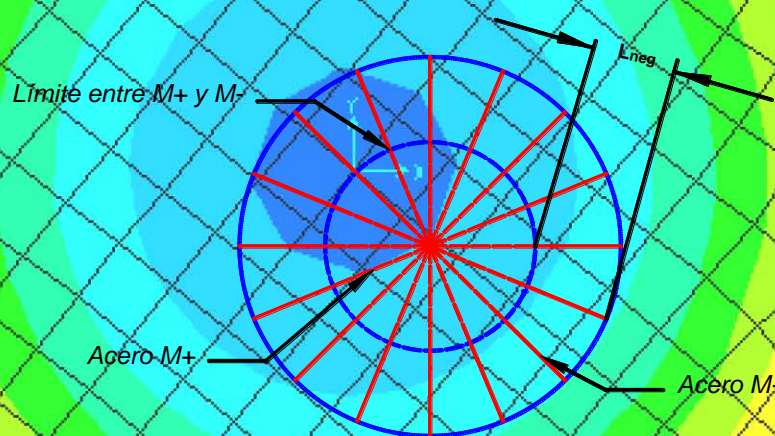


Figura 3.16. Configuración teórica del acero de refuerzo en una losa circular

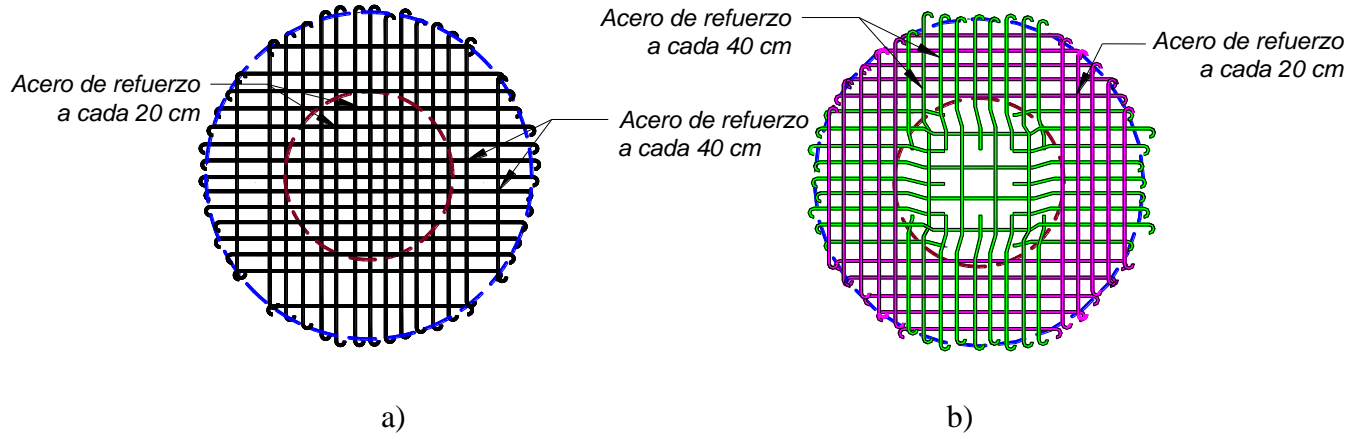


Figura 3.17. Propuesta del acero de refuerzo en placas circulares donde: a) refuerzo positivo y b) refuerzo negativo

3.2.2.4 Losas elípticas

La simulación de losas de geometría elíptica se realizó con modelos numéricos cuyas características se muestran en la Tabla 5. El mallado propuesto para el estudio de esta geometría se muestra en la figura 3.18.

Tabla 5. Características físicas de placas elípticas.

Modelo	Dimensiones (m)		Relación b/a
	a	b	
1	1	0.5	0.5
2	1	0.6	0.6
3	1	0.7	0.7
4	1	0.8	0.8
5	1	0.9	0.9

Sustituyendo la solución de desplazamientos (Bryan, 1891), de la ecuación (3.10), en las ecuaciones (3.2) y (3.3) se obtienen soluciones exactas de momentos en las placas elípticas empotradas descritas en la Tabla 5, tomando como referencia el centro de la elipse, donde:

$$w_o(x, y) = \frac{\omega}{8D} \frac{a^4 b^4 (x^2 / a^2 + y^2 / b^2 - 1)}{3a^4 + 3b^4 + 2a^2 b^2} \quad (3.10)$$

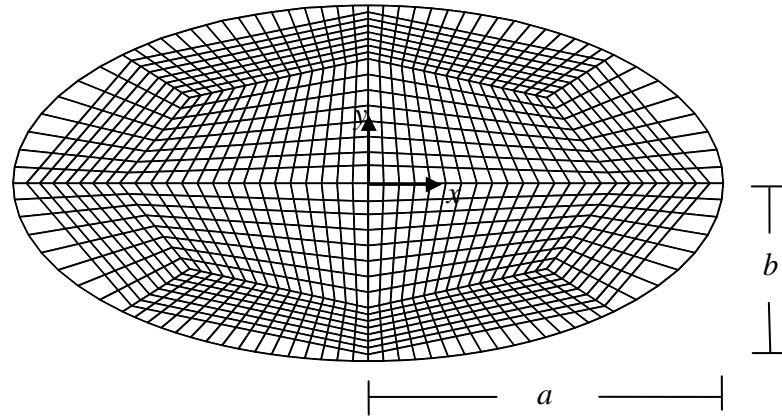
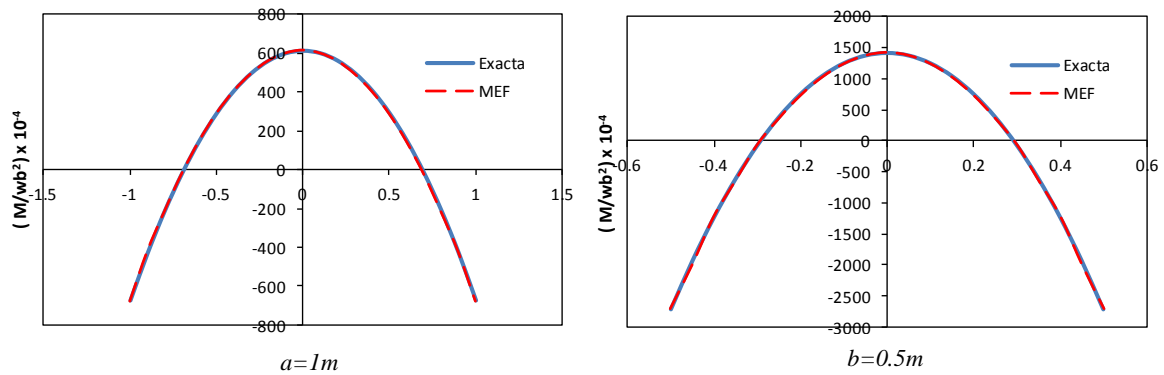
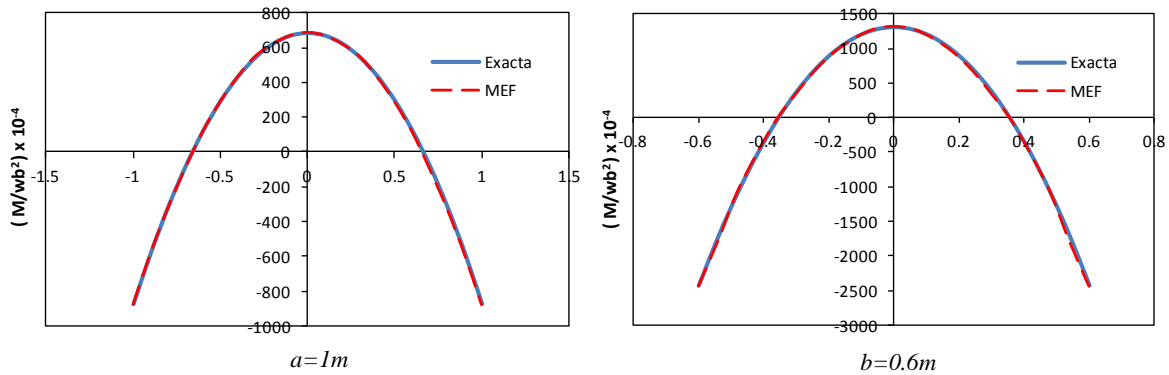


Figura 3.18. Modelo de elementos finitos para placa elipsoidal

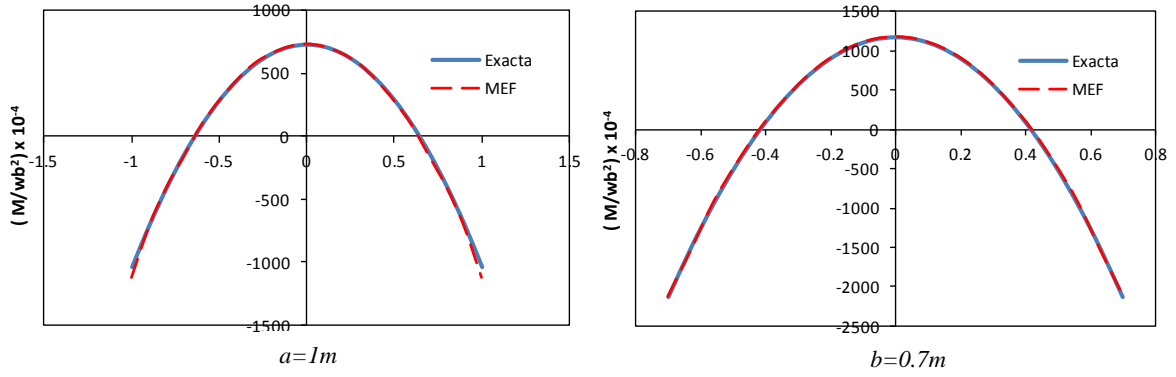
Los coeficientes elásticos sobre ambos ejes de la elipse obtenidos con las soluciones exactas y el MEF para placas empotradas se muestran en la figura 3.19. Los coeficientes para la condición de apoyo simple obtenidos sólo con el MEF se muestran en la figura 3.20 pues su solución exacta es más complicada que en el caso de empotramiento perfecto (Galerkin, 1923).



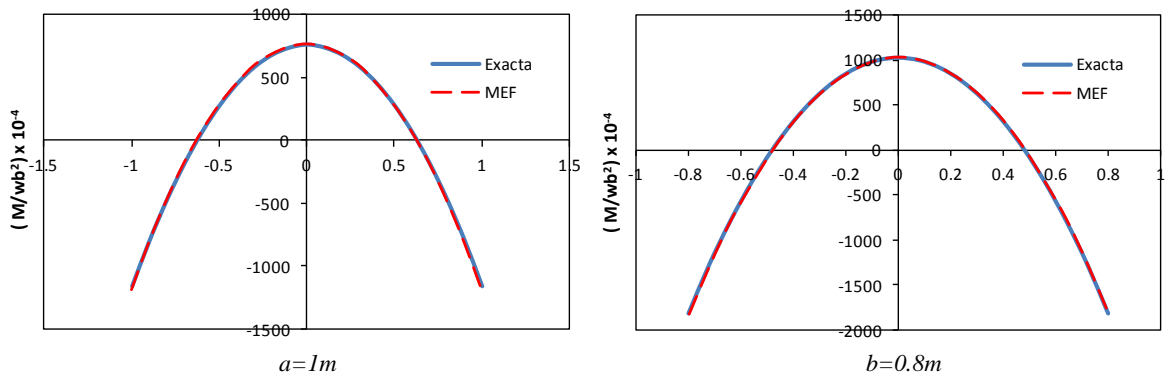
a)



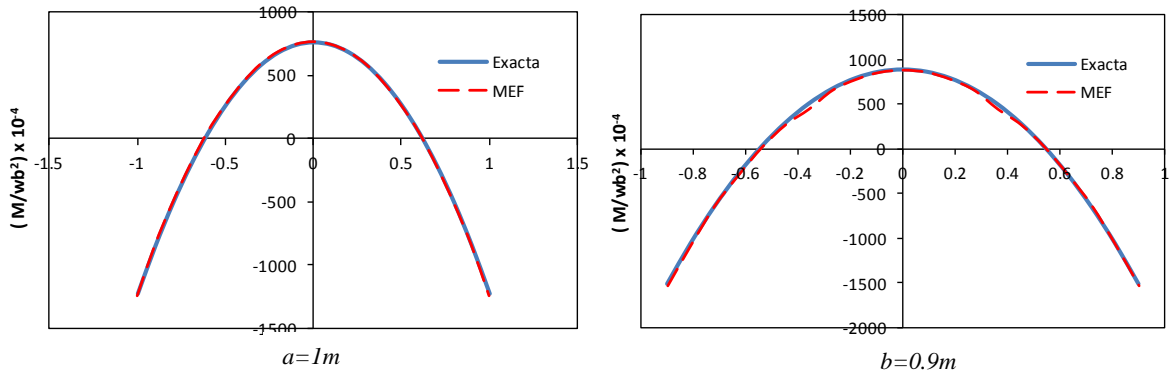
b)



c)

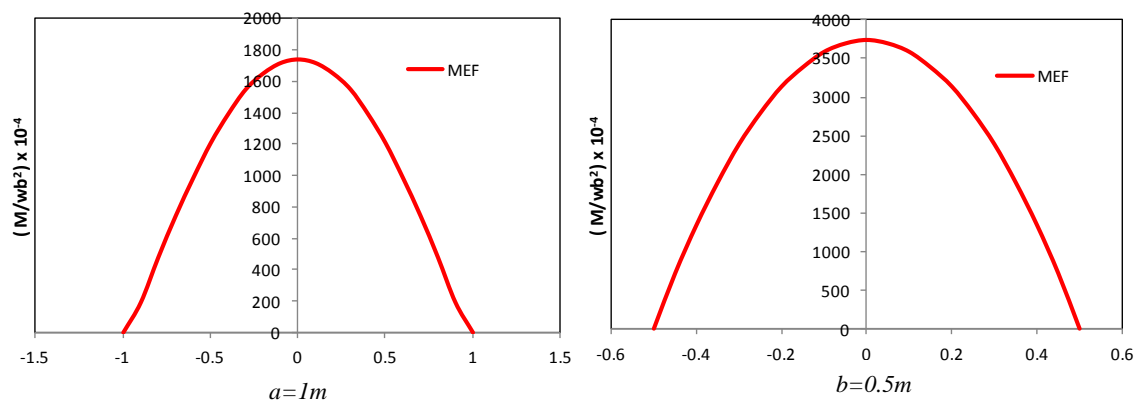


d)

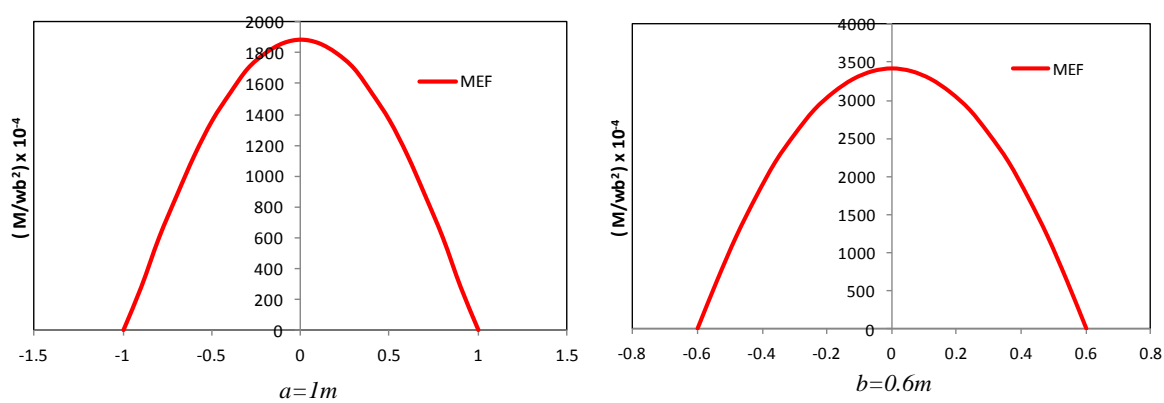


e)

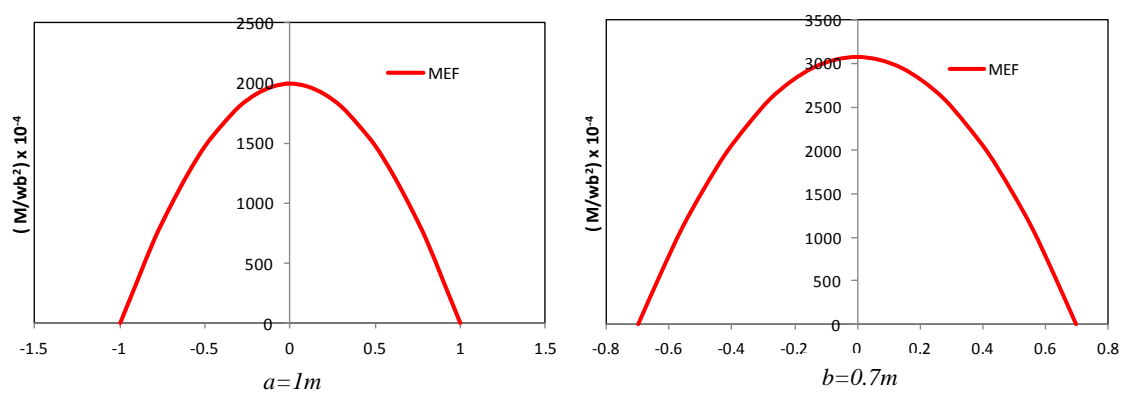
Figura 3.19. Coeficientes elásticos para placas elipsoidales con condiciones de apoyo empotrado para distintas relaciones b/a : a) 0.5, b) 0.6, c) 0.7, d) 0.8 y e) 0.9



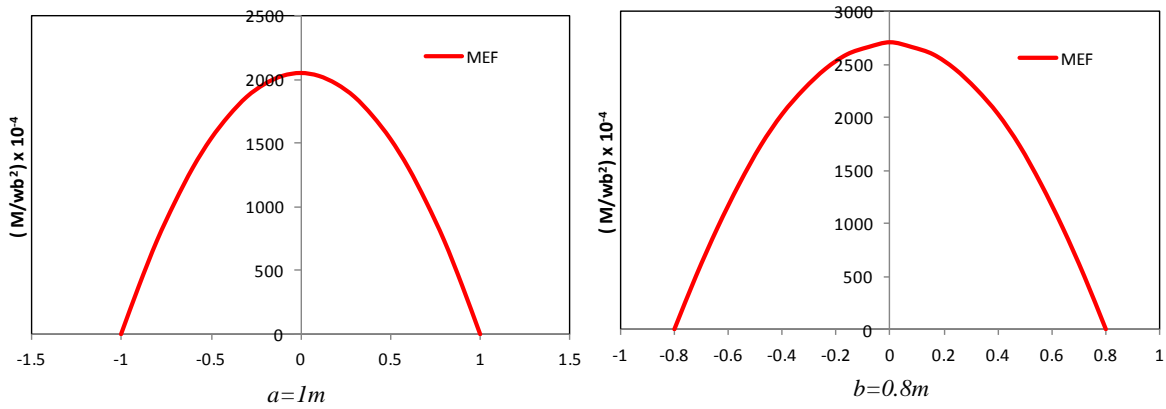
a)



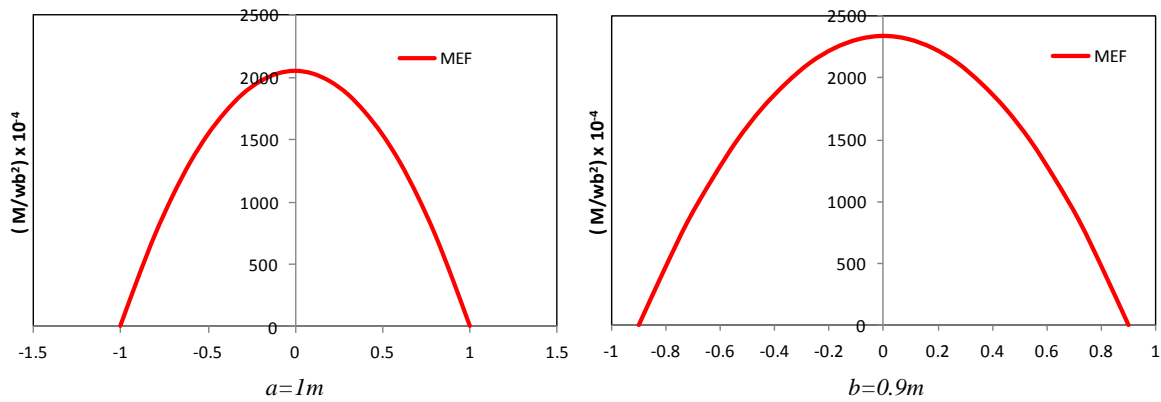
b)



c)



d)



e)

Figura 3.20. Coeficientes elásticos para placas elipsoidales en condiciones de apoyo simple para distintas relaciones a/b : a) 0.5, b) 0.6, c) 0.7, d) 0.8 y e) 0.9

Con los datos obtenidos de las figuras 3.19 y 3.20 se observa que la solución del MEF es aproximada con la solución exacta y que los coeficientes tanto en la dirección “ x ” como en “ y ”, *decrecen conforme incrementa la relación a/b .*

La figura 3.21 muestra la distribución general de momentos en una elipse en ambas direcciones, momentos máximos negativos en los extremos y momentos positivos en el centro. Obteniendo una longitud de armado negativo $L_{neg}=a/3$ en el lado largo y $L_{neg}=b/2$ en el lado corto.

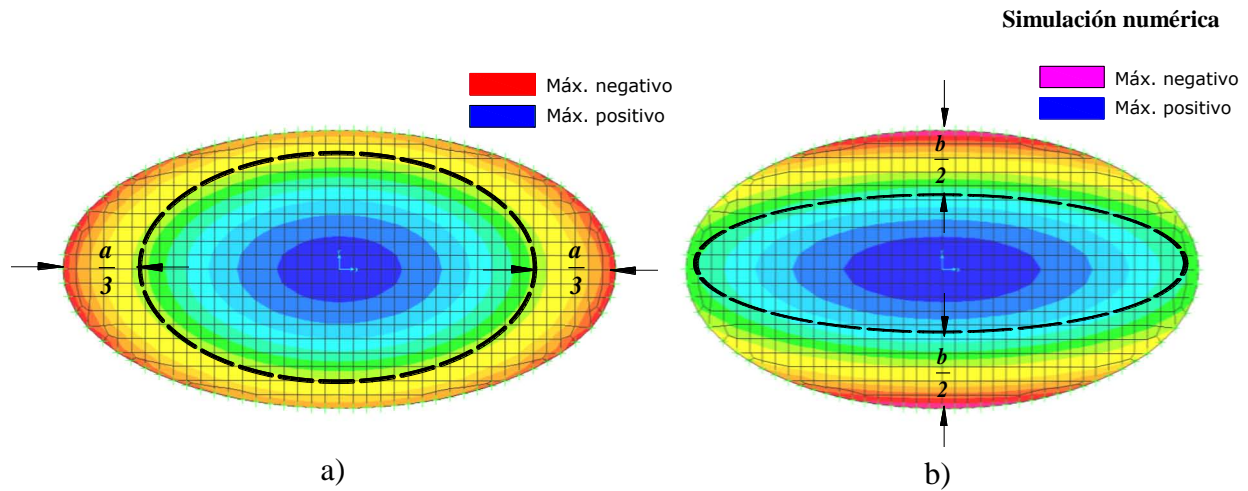


Figura 3.21. Distribución de momentos en elipse empotrada en los apoyos en dirección: a) larga y b) corta

Con base en la distribución de momentos en el centro y en los extremos, de las elipses mostradas en la figura 3.21, se propone una distribución de acero similar a las secciones anteriores (figura 3.22).

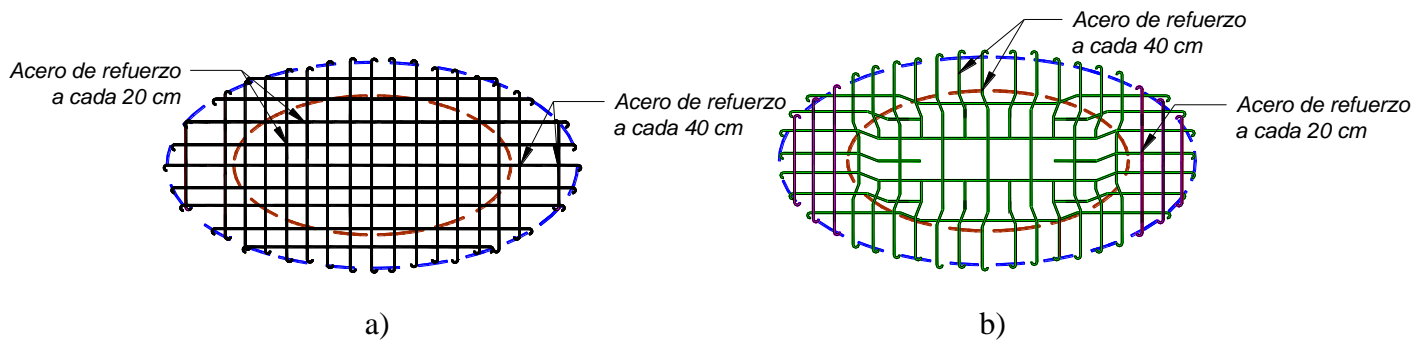


Figura 3.22. Propuesta del acero de refuerzo en placas elípticas donde: a) refuerzo positivo y b) refuerzo negativo

Las propuestas de armados para las losas triangulares, circular y elíptica se basan en los armados comúnmente utilizados en la práctica profesional.

3.2.3 Análisis no lineal

En la sección anterior se analizaron las losas como elementos placa, donde se consideró que el material es homogéneo, isotrópico y elástico lineal. Sin embargo, puesto que las losas son de concreto reforzado no cumplen con la premisa anterior, por lo que su comportamiento es ortotrópico y no lineal.

En el análisis de estructuras existen dos tipos de no linealidades en los sistemas estructurales:

- *No linealidad física.* Que se caracteriza por presentar una relación no lineal entre los esfuerzos y deformaciones.

- *No linealidad geométrica.* Es aquella que se presenta cuando los desplazamientos que presenta la estructura son grandes y deben considerarse en el análisis.

En el caso de los análisis de las losas de concreto reforzado realizados en esta tesis, se presentan los dos tipos de no linealidad, pues los modelos estudiados presentan una región de post-fluencia en los materiales y las ecuaciones de deformación contienen términos no lineales adicionales cercanos a cero indicando que existe no linealidad geométrica.

El modelo constitutivo utilizado para el acero de refuerzo tiene un comportamiento bilineal como se muestra en la figura 3.23, el cual presenta un valor C que indica comportamiento elástico, un operador constitutivo C^T que indica una pendiente de post-fluencia lineal y que corresponde a un modelo de la teoría de plasticidad de Von Mises. Este modelo se asocia a los elementos link8 en el software Ansys 12.0.1.

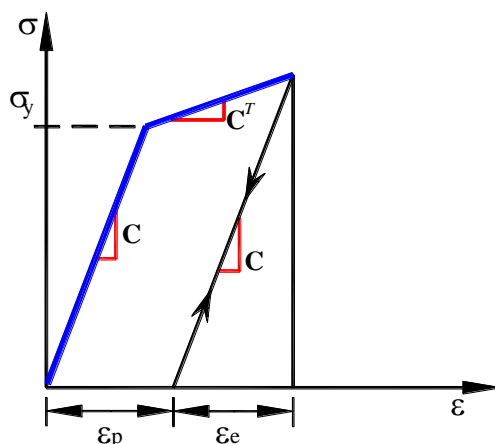


Figura 3.23. Modelo constitutivo general para el acero de refuerzo utilizado en el análisis no lineal de losas de concreto reforzado

En la Tabla 6 se muestran las características que presenta el acero de refuerzo tanto en el rango elástico como en el inelástico. Estos valores se propusieron en función de las propiedades que presenta el acero comercial.

Tabla 6. Propiedades mecánicas del acero de refuerzo utilizado en modelos numéricos.

Propiedades de acero de refuerzo	
Módulo de elasticidad	2×10^6 kgf/cm ²
Esfuerzo de fluencia	4200 kgf/cm ²
Pendiente de post-fluencia	29277 kgf/cm ²
Relación de Poisson	0.3

Para el concreto simple se utilizó un modelo constitutivo que presenta un rango elástico, así como una parte de ablandamiento debido al agrietamiento del material, como se muestra en la figura 3.24a. Además, se consideró que el concreto tiene diferentes umbrales de esfuerzos como se muestra en la figura 3.24b, donde σ_{ut} y σ_{uc} son los esfuerzos últimos a tensión y compresión, respectivamente. Estos modelos están asociados al elemento Solid65 de Ansys.

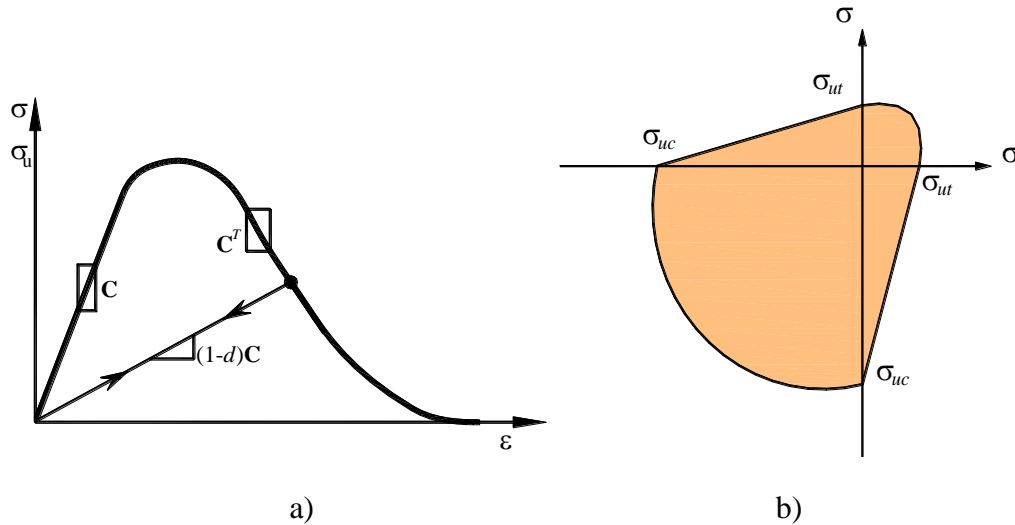


Figura 3.24. Modelo constitutivo general para el concreto simple: a) curva esfuerzo deformación y b) superficie de falla

En la Tabla 7 se muestran las propiedades mecánicas utilizadas para el concreto. Se emplearon concretos con dos valores distintos de resistencia a compresión que generalmente se usan en la práctica. En el caso del módulo de elasticidad se utilizó un valor que se encuentra entre $8000(f'c)^{1/2}$ y $11000(f'c)^{1/2}$ (González y Fernández, 2006) para concretos de la Ciudad de México. Por otra parte, el coeficiente de transferencia de cortante representa la fracción de esfuerzo cortante que se transmite de una cara a otra cuando existe una grieta; mientras que el factor de grietas por tensión representa la fracción de la resistencia a tensión que recupera el concreto al aparecer la primera grieta.

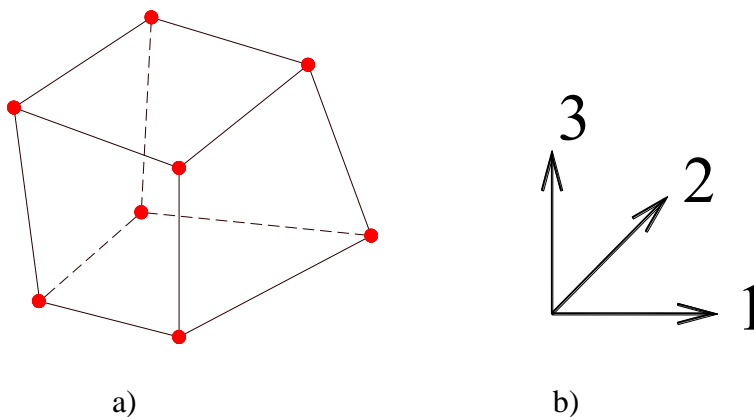
Tabla 7. Propiedades mecánicas del concreto utilizadas para el modelado numérico.

Propiedades de concretos	
Módulo de elasticidad	$1.5 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$
Resistencia a compresión	300 kgf/cm^2
Resistencia a compresión	250 kgf/cm^2
Resistencia a tensión	30 kgf/cm^2
Resistencia a tensión	25 kgf/cm^2
Relación de Poisson	0.2
Coefficiente de transferencia de cortante	0.2
Factor de grietas por tensión	0.9

En general, para las losas estudiadas se utilizaron los concretos que se muestran en la Tabla 7 y se utilizaron barras de acero de 3/8" con área de 0.71 cm^2 tanto para acero positivo como negativo, con las propiedades mostradas en la Tabla 6.

3.2.3.1 Consideraciones en el mallado

Para el concreto se utiliza un mallado compuesto por elementos sólidos en 3-D (figura 3.25), que se componen por ocho nodos que tienen tres grados de libertad cada uno y presenta gran capacidad en el manejo del agrietamiento y aplastamiento. Además, en concreto reforzado el uso de este tipo de elementos es esencial para obtener una distribución de momentos flexionantes con mejor aproximación.



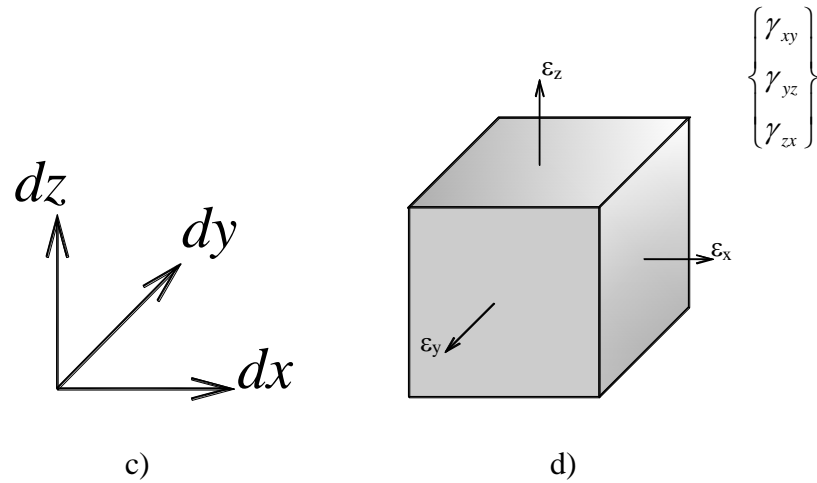


Figura 3.25. Elemento sólido donde: a) elemento finito, b) grados de libertad, c) desplazamientos y d) deformaciones

En el caso del acero de refuerzo se utiliza un mallado compuesto por elementos barra en 3D (figura 3.26), que son elementos uniaxiales que trabajan en tensión o compresión, y se componen por tres grados de libertad cada nodo. Presenta la ventaja de incluir plasticidad y manejar grandes deformaciones de acuerdo a los requerimientos del análisis.

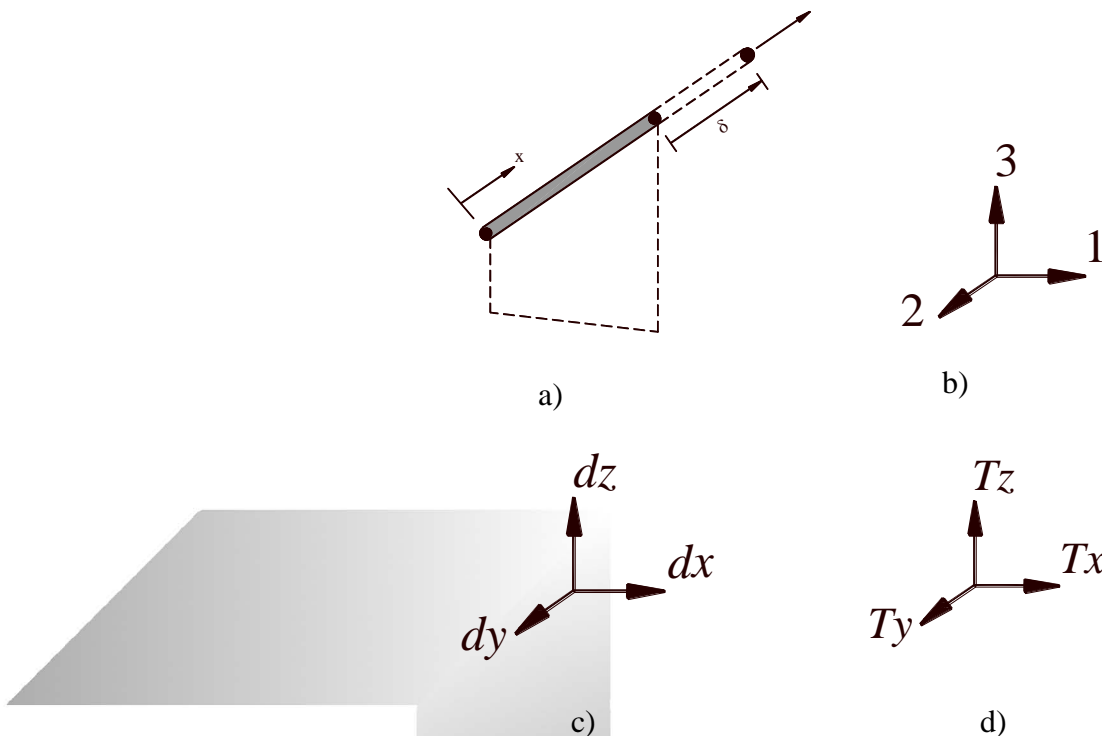


Figura 3.26. Elemento barra donde: a) elemento finito, b) grados de libertad, c) desplazamientos y d) tensiones

3.2.3.1.1 Verificación del mallado

Para validar el mallado propuesto para las losas estudiadas en esta tesis, se estudió una losa circular simplemente apoyada con radio $r=1\text{m}$ con comportamiento elástico. Con el propósito de coincidir con el acero de refuerzo, se propuso un tamaño general de elemento sólido con medidas de $10\text{cm} \times 10\text{cm} \times 2.5\text{ cm}$ aproximadamente en cada modelo numérico (figura 3.27a). Para verificar la factibilidad del tamaño de los elementos finitos propuestos se realizó un mallado más fino, con elementos finitos con dimensiones de $5\text{cm} \times 5\text{cm} \times 2.5\text{ cm}$ en su mayoría (figura 3.27b); se compararon estas dos mallas propuestas utilizando el concepto de energía de deformación:

$$W = \int dW_0 d\Omega \quad (3.11)$$

$$dW_0 = \int_0^{\varepsilon} \sigma(\mathbf{x}) d\varepsilon \quad (3.12)$$

donde:

dW_0 = Densidad de energía de deformación por unidad de volumen.

σ = Estado de esfuerzos en el elemento.

ε = Deformación del elemento.

$d\Omega$ = Diferencial de volumen.

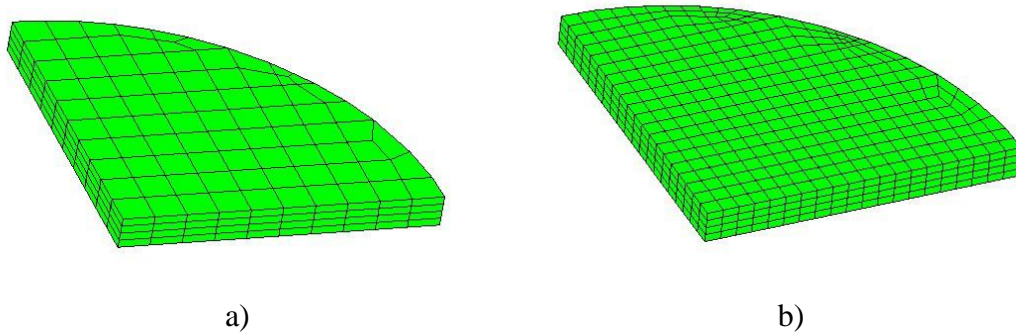


Figura 3.27. Mallado en modelos numéricos: a) propuesto y b) refinado

Con la ecuación (3.11) se obtiene la energía de deformación de las dos mallas propuestas, las cuales se muestran en la Tabla 8. Se observa que la diferencia de energías de deformación entre los dos modelos es mínima, en consecuencia el refinamiento mejoraría poco los resultados, por lo que, en los modelos numéricos se utilizó el tamaño de elementos de la malla mostrada en la figura 3.27a.

Tabla 8. Energías de deformación en modelos para verificación del mallado

Mallado	No. Elementos	Energía de deformación (Kgf-cm)
Propuesto	340	9.31
Refinado	1360	9.36

3.2.3.2 Losas triangulares

El análisis no lineal de losas triangulares se realizó aplicando incrementos de carga hasta obtener un desplazamiento máximo de 5 cm. La figura 3.28 muestra la configuración del acero de refuerzo propuesto para la mitad de la losa triangular (debido a su simetría), con altura $a=4\text{m}$. La figura 3.29 muestra la variación de la carga distribuida contra el desplazamiento al centro de la losa obtenida del análisis no lineal. Se observa que se tiene un comportamiento de endurecimiento por deformación.

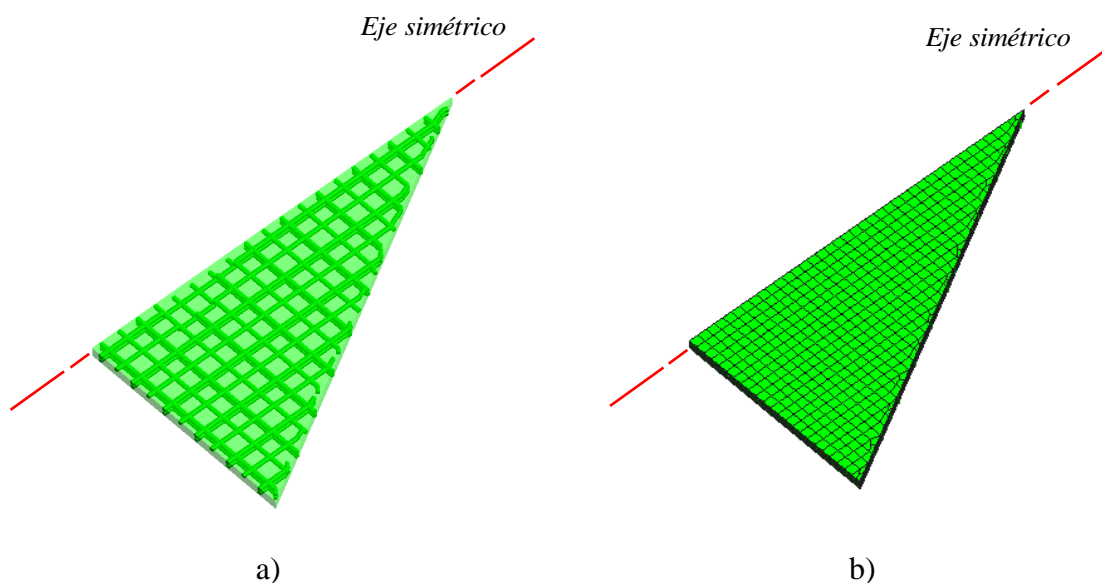


Figura 3.28. Malla de losa triangular con $a=4\text{m}$ donde: a) distribución del acero y b) malla de concreto

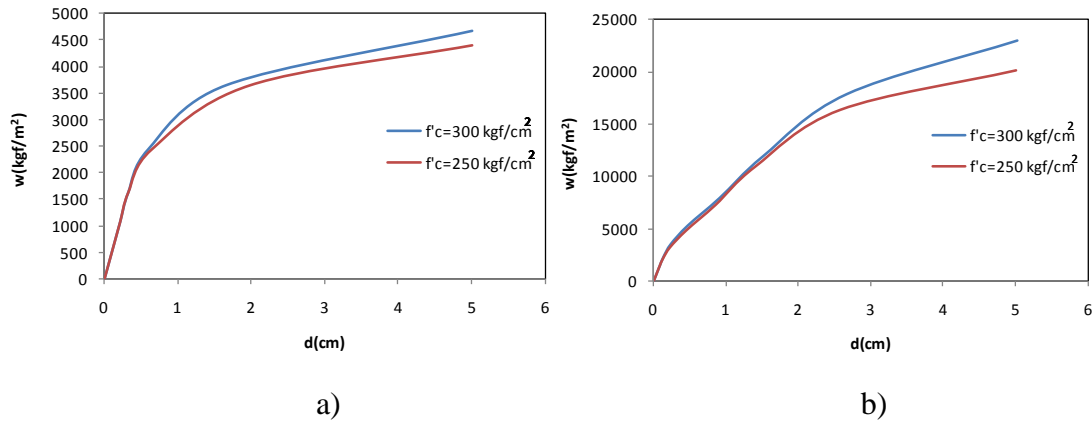


Figura 3.29. Curvas carga vs desplazamiento en el centro en losa triangular con $a=4\text{m}$ en condición: a) apoyada y b) empotrada

3.2.3.3 Losas circulares

Para la simulación no lineal de losas circulares se consideró una losa con $r=2\text{m}$; la configuración del acero de refuerzo se muestra en la figura 3.30. Se modeló sólo un cuarto de la losa debido a la simetría del problema.

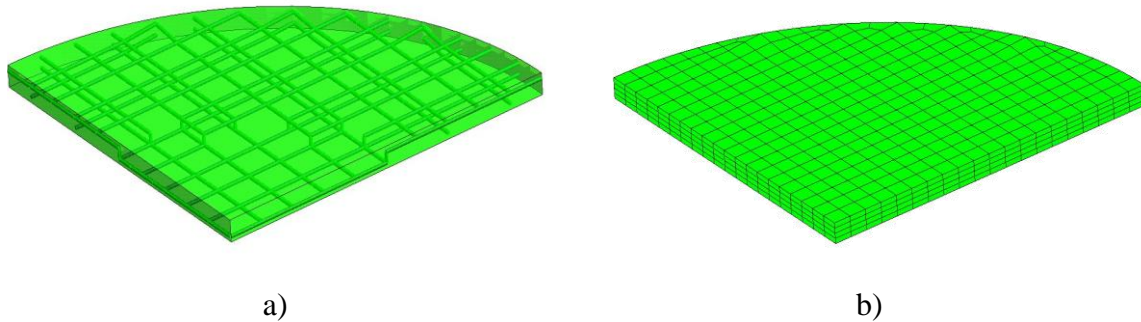


Figura 3.30. Malla de losa circular con $r=2\text{m}$ donde: a) distribución del acero y b) malla de concreto

La figura 3.31 muestra la variación de la carga distribuida de las losas circulares para $r=2\text{m}$, considerando el caso de apoyo simple y empotrada.

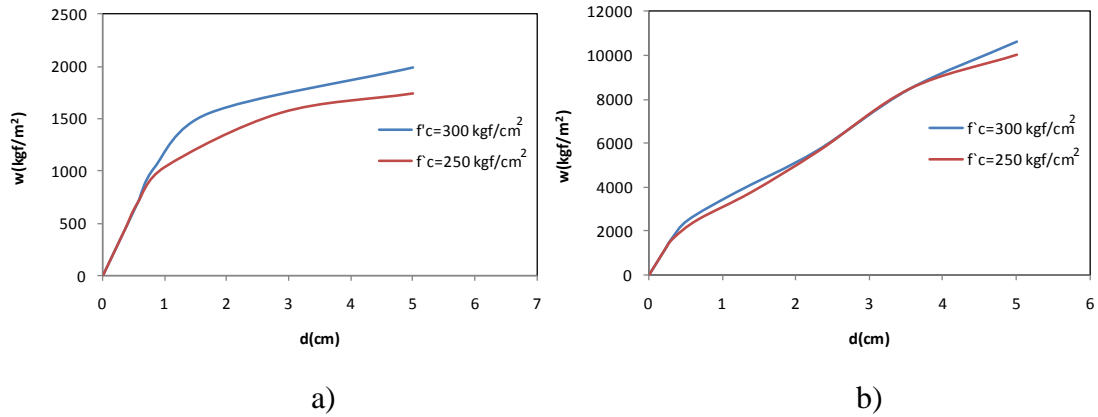


Figura 3.31. Curva carga vs desplazamiento en el centro en losa circular con $r=2\text{m}$ en condición: a) apoyada y b) empotrada

3.2.3.4 Losas elípticas

Para la simulación de losas elípticas se utilizó la configuración del acero de refuerzo mostrado en la figura 3.32 para las relaciones que muestra la Tabla 9. Las figuras 3.33 a 3.37 muestran la variación de la carga distribuida contra el desplazamiento en el centro del claro para cada relación y condición de apoyo.

Tabla 9. Características físicas de losas elípticas.

Modelo	Dimensiones (m)		Relación
	a	b	
1	2	1	0.5
2	2	1.2	0.6
3	2	1.4	0.7
4	2	1.6	0.8
5	2	1.8	0.9

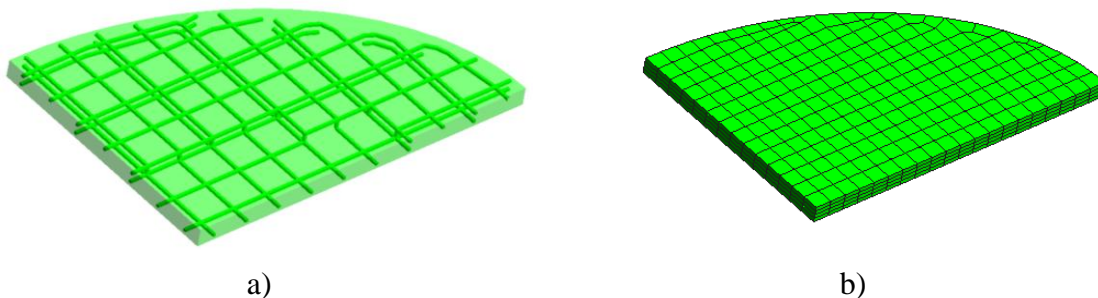


Figura 3.32. Malla de losa elíptica donde: a) distribución del acero y b) malla de concreto

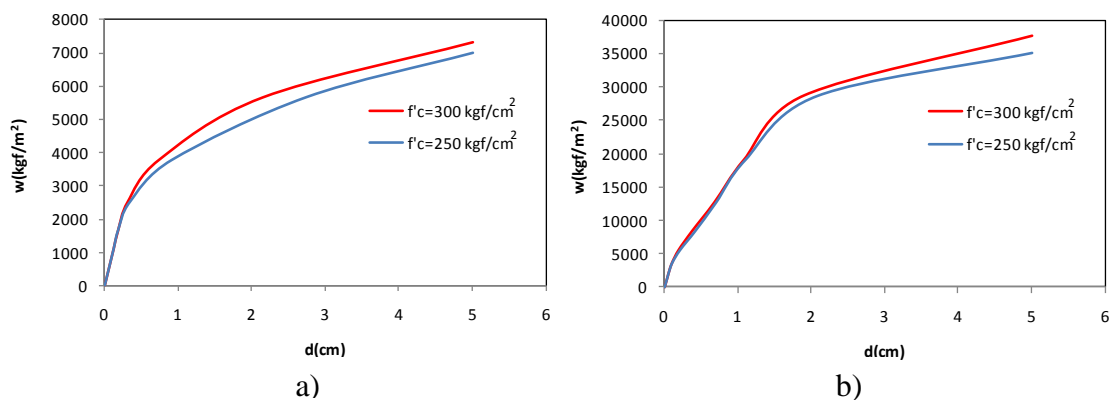


Figura 3.33. Curva carga vs desplazamiento en el centro en losa elíptica con relación $b/a=0.5$ con condición: a) apoyada y b) empotrada

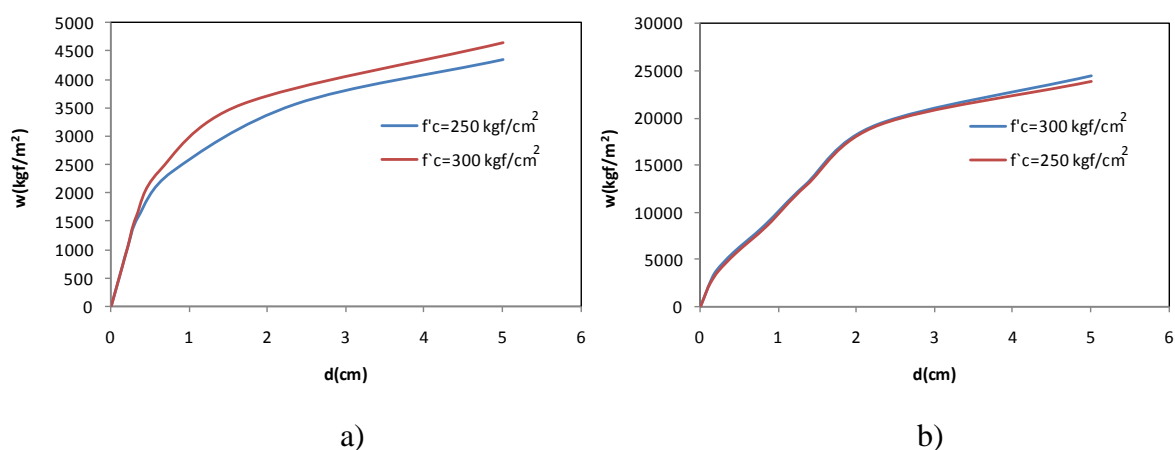


Figura 3.34. Curva carga vs desplazamiento en el centro en losa elíptica con relación $b/a=0.6$ con condición: a) apoyada y b) empotrada

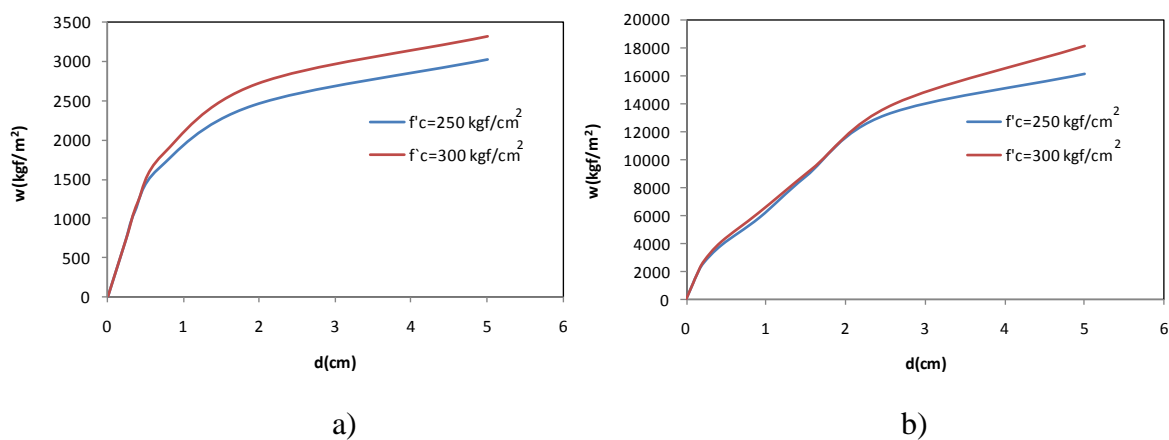


Figura 3.35. Curva carga vs desplazamiento en el centro en losa elíptica con relación $b/a=0.7$ con condición: a) apoyada y b) empotrada

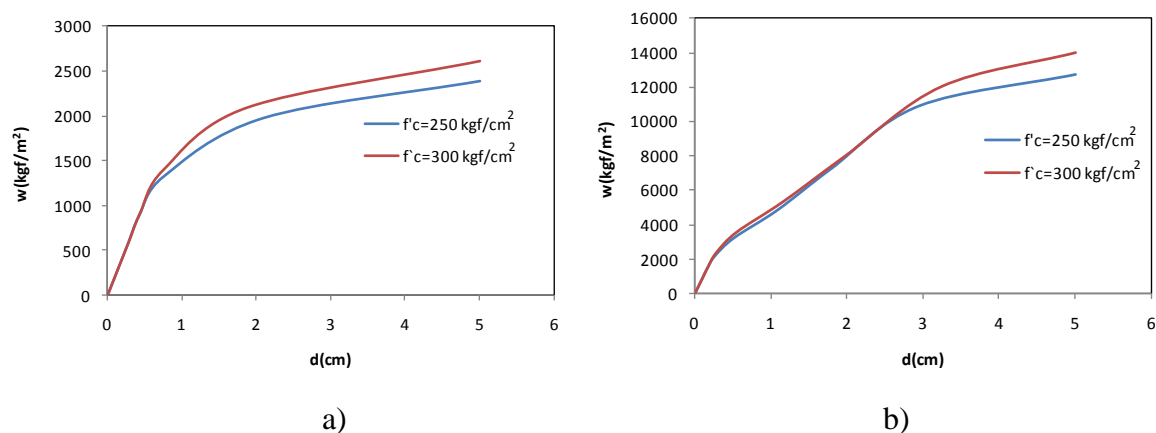


Figura 3.36. Curva carga vs desplazamiento en el centro en losa elíptica con relación $b/a=0.8$ con condición: a) apoyada y b) empotrada

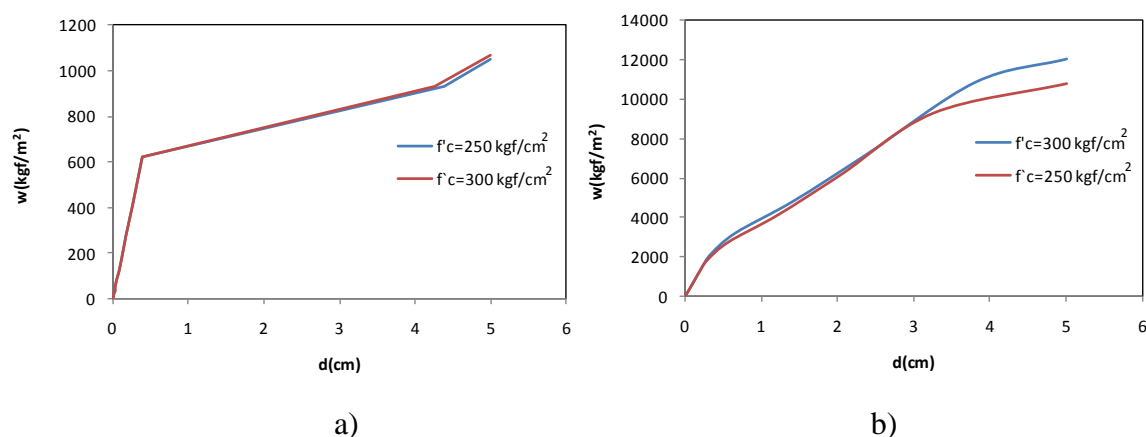


Figura 3.37. Curva carga vs desplazamiento en el centro en losa elíptica con relación $b/a=0.9$ con condición: a) apoyada y b) empotrada

Se observa que las curvas de carga contra desplazamiento de cada losa presentan un comportamiento de endurecimiento por deformación debido al acero de refuerzo que contiene.

Capítulo 4

DETERMINACION DE COEFICIENTES DE DISEÑO Y TRAYECTORIAS DE AGRIETAMIENTO

4.1 Coeficientes de diseño

4.1.1 Introducción

Debido a que los elementos sólidos con los que se realizaron las simulaciones numéricas presentan sólo grados de libertad de traslación en sus nodos, se obtienen los desplazamientos como variables independientes; a partir de éstos se determinan los estados de deformaciones ϵ y de esfuerzos σ . Sin embargo, para obtener los coeficientes de diseño es necesario obtener los momentos por unidad de longitud, los cuales se calcularon mediante la ecuación (4.1).

$$M_x = b \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x(z) z dz \quad (4.1)$$

donde:

σ_x = Función que describe el esfuerzo en la dirección x .

z = Eje de referencia a lo largo del peralte de la losa.

t = Peralte de la losa.

b = Ancho unitario de la losa.

El cálculo de momentos flexionantes con la ecuación (4.1) se realizó considerando un sistema de referencia en un punto de interés a lo largo del espesor de la placa como se muestra en la figura 4.1.

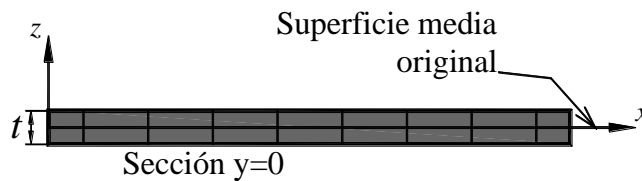


Figura 4.1. Planteamiento de sistema de referencia

La integración de la función de los esfuerzos en el espesor de la losa para obtener el momento de una sección de ancho unitario se realizó a través de los esfuerzos en los nodos como se muestra en la figura 4.2. Se consideró que el estado de esfuerzos se describe por funciones lineales, consistente con las derivadas de las funciones de interpolación.

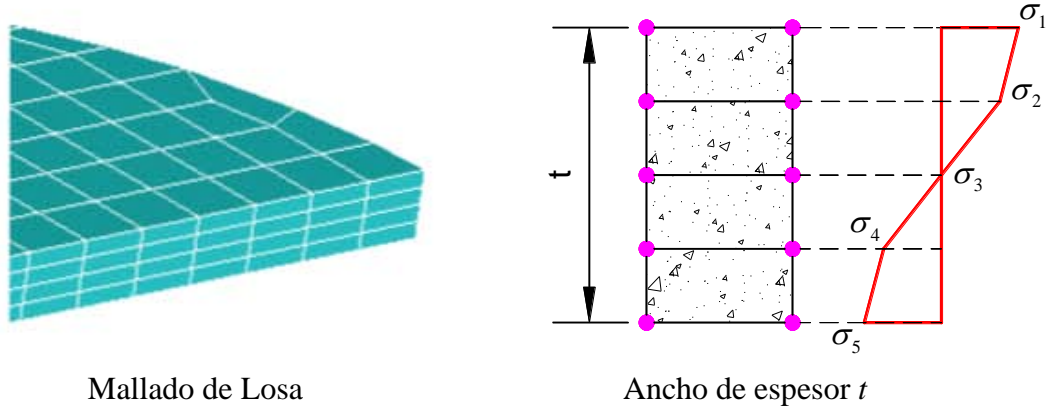


Figura 4.2. Configuración de esfuerzos en elementos sólidos

Para validar la ecuación (4.1), tomando como referencia la figura 4.2, se obtienen y comparan los momentos elásticos en el centro para una losa circular sin refuerzo simplemente apoyada y empotrada con radios $r=1\text{m}$, $r=2\text{m}$ y espesor de 0.10 m . En las tablas 11 y 12 se muestran los esfuerzos obtenidos para una losa circular modelada con elementos sólidos.

Tabla 10. Esfuerzos en el centro de losa circular simplemente apoyada.

Esfuerzo	σ_i (kgf/m ²)	
	$r=1\text{m}$	$r=2\text{m}$
σ_1	-119850	-479220
σ_2	-59925	-239370
σ_3	0	0
σ_4	59925	239370
σ_5	119850	479220

Tabla 11. Esfuerzos en el centro de losa circular empotrada.

Esfuerzo	σ_i (kgf/m ²)	
	r=1m	r=2m
σ_1	-45150	-179400
σ_2	-22575	-89726
σ_3	0	0
σ_4	22575	89726
σ_5	45150	179400

Como ejemplo se tomaron los esfuerzos de la losa circular simplemente apoyada con r=1m (Tabla 10). Debido a que la distribución de esfuerzos es lineal, se obtiene su respectiva pendiente como lo muestra la ecuación (4.2), se sustituye en la ecuación (4.1) y se integra en función de z (4.3):

$$m = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{z_1 - z_3} = \frac{119850}{0.05} = 2.397 \times 10^6 \quad (4.2)$$

$$M_x = \int_{-0.05}^{0.05} (2.397 \times 10^6 z) z dz = 199.75 \text{ kgf} \cdot \text{m} / \text{m} \quad (4.3)$$

Una vez obtenido el momento, se obtienen los coeficientes elásticos con la ecuación (3.8). En la Tabla 12 se presenta la comparación de los momentos obtenidos con la solución exacta y con el método aproximado que se basa en la utilización de elementos sólidos (MEF_{SOLIDOS}) y elementos placa (MEF_{SHELL}); en tanto que la Tabla 13 muestra la comparación entre coeficientes.

Tabla 12. Comparación entre momentos elásticos obtenidos con diferentes métodos de análisis.

Momentos elásticos (kgf-m/m)				
Condición	Radio(m)	MEFSOLIDOS	MEFSHELL	Exacta
<i>Apoyado</i>	1	199.75	197	196.5
	2	798.7	795	784.5
<i>Empotrado</i>	1	75.2	75.4	73.5
	2	299	300.5	294.2

Tabla 13. Comparación entre coeficientes elásticos obtenidos con diferentes métodos de análisis.

Coeficientes elásticos ($M/\omega a^2$)				
Condición	Radio(m)	MEFSOLIDOS	MEFSHELL	Exacta
<i>Apoyado</i>	1	0.199	0.197	0.196
	2	0.199	0.198	0.196
<i>Empotrado</i>	1	0.075	0.075	0.073
	2	0.074	0.075	0.073

Se observa que las soluciones obtenidas con los diversos métodos son consistentes; por lo tanto se valida la ecuación (4.1) para los objetivos propuestos en esta tesis.

4.1.2 Losas triangulares

En esta sección se obtienen los coeficientes correspondientes a esta losa; se identifican las zonas donde se concentran los esfuerzos máximos positivos y negativos debido a una carga distribuida aplicada. Para las losas triangulares las zonas de momento máximo se muestran en la figura 4.3; las zonas A, B y C presentan momento negativo.

En la zona C la dirección de momento máximo corresponde a los esfuerzos principales y presentan una orientación $\theta=30^\circ$ como muestra la figura 4.4.

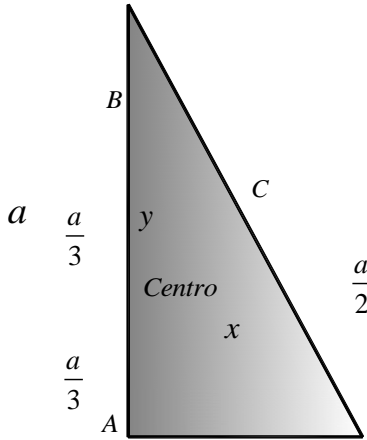


Figura 4.3. Zonas de análisis de momentos en triángulo

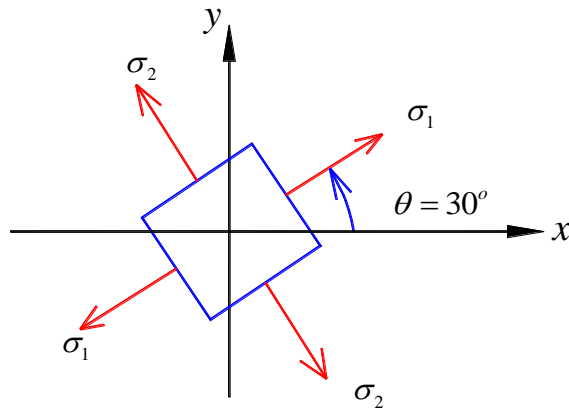


Figura 4.4. Dirección de esfuerzos principales en zona C del triángulo

Las tablas 15 y 16 muestran los coeficientes de diseño obtenidos para una altura $a=4\text{m}$; el índice I indica la condición de colado monolíticamente, mientras que el índice II indica la condición de colado no monolíticamente. Los valores mostrados deben multiplicarse por $10^{-4}wa^2$ para obtener momentos de diseño por unidad de ancho. El anexo I muestra la variabilidad de los coeficientes en cada punto de la losa.

Tabla 14. Coeficientes de diseño elásticos de losas triangulares.

Momento	Claro	Altura (m)	
		4	
		I	II
Neg. En los bordes	Base	218	0
	Diagonal	251	0
	Punta	26	70
Positivo	Dirección x	99	222
	Dirección y	94	212

Tabla 15. Coeficientes de diseño inelásticos de losas triangulares.

Momento	Claro	Altura (m)	
		4	
		I	II
Neg. En los bordes	<i>Base</i>	214	0
	<i>Diagonal</i>	281	0
	<i>Punta</i>	55	196
Positivo	<i>Corto</i>	102	191
	<i>Largo</i>	100	231

4.1.3 Losas circulares

La obtención de los coeficientes en losas circulares se realizó en los puntos donde se presentan esfuerzos máximos positivos y negativos, los cuales se encuentran en el centro y en el extremo A respectivamente, como se muestra en la figura 4.5.

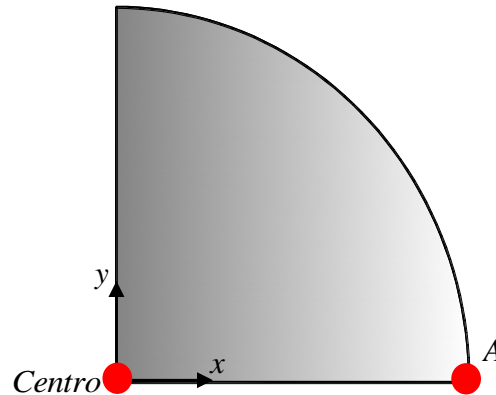


Figura 4.5. Zonas de análisis de momentos en círculos

Las tablas 17 y 18 muestran los coeficientes de diseño obtenidos para radio $r=2m$. Los valores mostrados deben multiplicarse por $10^{-4}wr^2$ para obtener momentos de diseño por unidad de ancho. El anexo I muestra el comportamiento de los coeficientes en cada punto de la losa.

Tabla 16. Coeficientes elásticos de diseño de losas circulares.

Momento	Radio(m)	
	2	
	I	II
Neg. En los bordes	1111	0
Positivo	725	1938

Tabla 17. Coeficientes inelásticos de diseño de losas circulares.

Momento	Radio(m)	
	2	
	I	II
Neg. En los bordes	1147	0
Positivo	858	1895

4.1.4 Losas elíptica

La obtención de los coeficientes en las losas elípticas se realizó en los puntos donde se obtienen los valores de esfuerzo máximo negativo, puntos A y B, y momento máximo positivo, centro (figura 4.6).

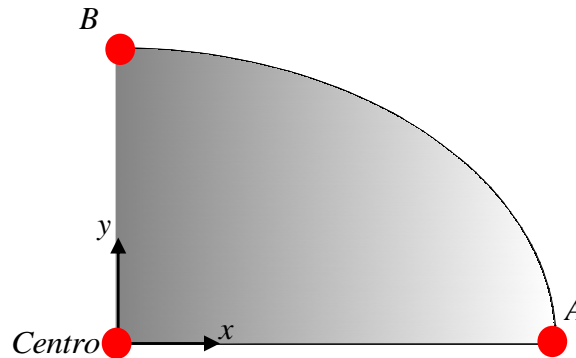


Figura 4.6. Zonas de análisis de momentos en losas elípticas

Las tablas 19 y 20 muestran los coeficientes de diseño obtenidos para relaciones claro corto a claro largo de 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 y 0.9. Los valores mostrados deben multiplicarse por $10^{-4}wb^2$ para obtener momentos de diseño por unidad de ancho. El anexo I muestra el comportamiento de los coeficientes en cada punto de la losa.

Tabla 18. Coeficientes elásticos de diseño de losas elípticas.

Momento	Claro	Relación de claros corto a largo (b/a)									
		0.5		0.6		0.7		0.8		0.9	
		I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
Neg. En los bordes	Corto	2238	0	2066	0	1837	0	1589	0	1340	0
	Largo	590	0	764	0	922	0	1024	0	1093	0
Positivo	Corto	1359	3617	1254	3304	1126	2968	992	2957	851	2256
	Largo	585	1682	657	1824	708	1926	736	2242	740	1973

Tabla 19. Coeficientes inelásticos de diseño de losas elípticas.

Momento	Claro	Relación de claros corto a largo (b/a)									
		0.5		0.6		0.7		0.8		0.9	
		I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
Neg. En los bordes	<i>Corto</i>	2238	0	2066	0	1852	0	1589	0	1339	0
	<i>Largo</i>	684	0	764	0	1027	0	1548	0	1159	0
Positivo	<i>Corto</i>	1502	3617	1347	3304	1220	2945	1115	2609	938	2174
	<i>Largo</i>	742	2009	768	2114	763	2392	2097	1977	1850	1901

En este capítulo se muestran coeficientes elásticos e inelásticos. Los coeficientes inelásticos presentan una variación, decremento o incremento con respecto a los coeficientes elásticos, tomándose los valores máximos de la variación respecto al incremento de carga; esto se debe a la influencia del agrietamiento en el concreto y el endurecimiento del acero de refuerzo en las zonas más demandadas de la losa.

Por lo tanto, se propone utilizar aquellos coeficientes con valores máximos con el fin de garantizar la seguridad estructural en los sistemas, para que tanto el concreto como el acero de refuerzo brinden una resistencia adecuada en el rango elástico.

4.2 Trayectorias de agrietamiento

4.2.1 Introducción

Las trayectorias de agrietamiento son de utilidad para identificar zonas de mayor concentración de esfuerzos en losas y sugerir cualitativamente una ubicación del acero de refuerzo para reducir el agrietamiento. En este capítulo se muestra la evolución del agrietamiento en cada uno de los tipos de geometría que se estudian en esta tesis. Es de interés mencionar que se utilizó un modelo de agrietamiento distribuido en el que el agrietamiento se representa como una degradación del material. El agrietamiento se representa con puntos o líneas en los puntos de integración Gaussiana del elemento, donde el material alcanzó una superficie de falla. Los puntos indican la presencia de aplastamiento; mientras que las líneas rojas y negras indican las direcciones del plano de falla que se presentan en los puntos de integración.

4.2.2 Losas triangulares

La figura 4.7 muestra la evolución del agrietamiento en losas triangulares ante el incremento de carga distribuida, el agrietamiento inicia en los extremos, en la parte superior de la losa (figura 4.7a), posteriormente se propaga en el centro, tanto en la parte superior como inferior (figura 4.7b).

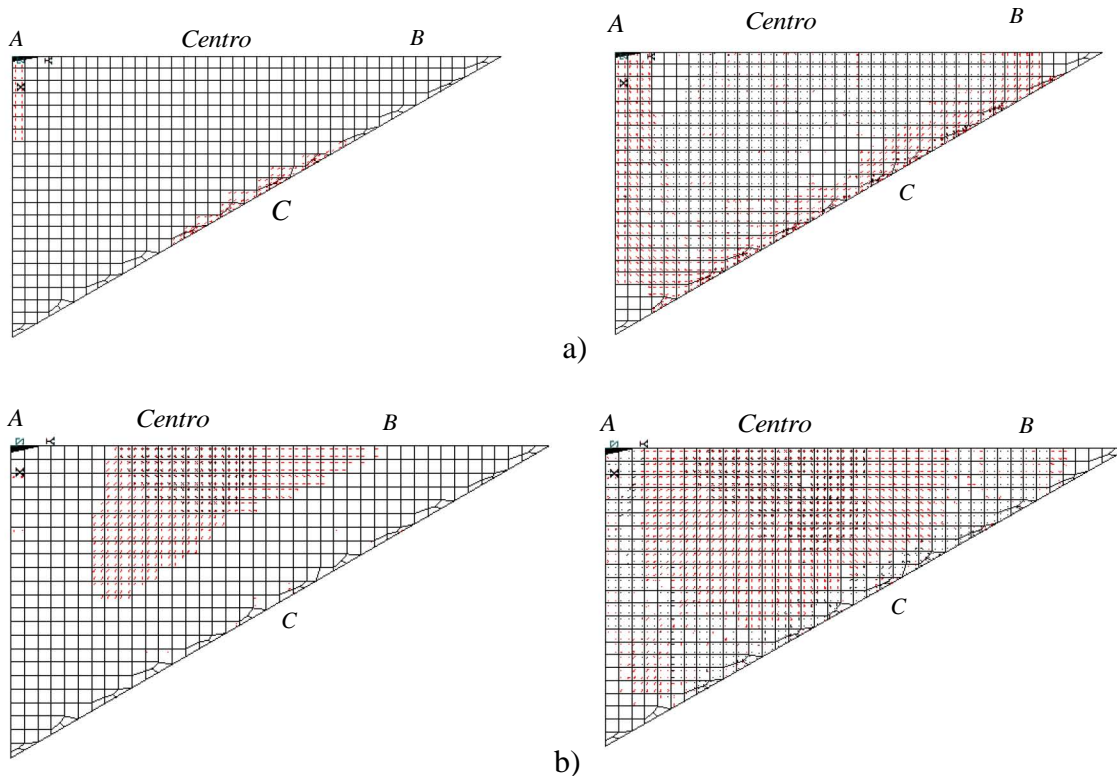


Figura 4.7. Evolución del agrietamiento en losa triangular empotrada: a) parte superior y b) parte inferior

En el caso de losas triangulares simplemente apoyadas el agrietamiento inicia en el centro de la losa en su parte inferior (figura 4.8b), posteriormente hacia los bordes. Esto se debe a que los momentos máximos se encuentran en el centro.

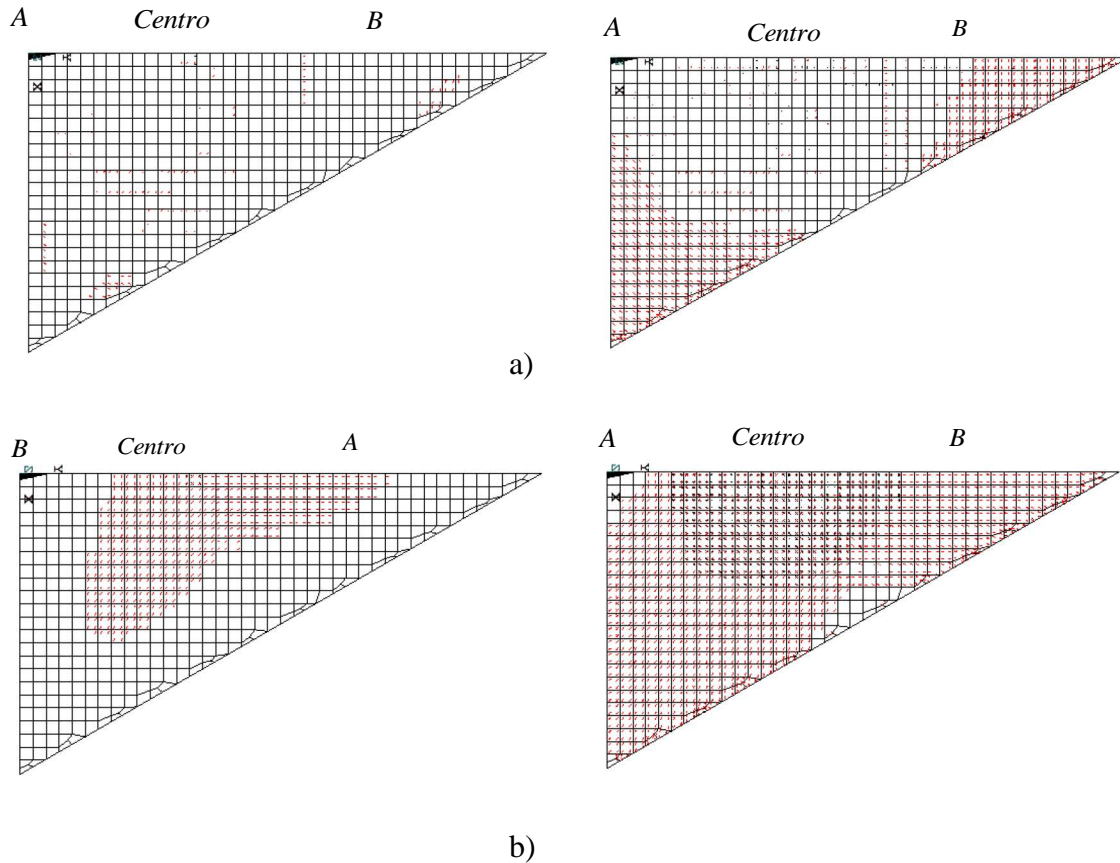


Figura 4.8. Evolución del agrietamiento del triángulo en condición de apoyo simple: a) parte superior y b) parte inferior

4.2.3 Losas circulares

Las losas circulares son completamente axisimétricas, por lo que el inicio del agrietamiento ocurre simultáneamente a lo largo de su borde. La figura 4.9 muestra la configuración del agrietamiento en losas circulares en condición de empotramiento. Se muestra el inicio de las primeras grietas en el borde en la parte superior de la losa (figura 4.9a). Posteriormente, el agrietamiento se presenta al centro del claro en la parte inferior (figura 4.9b).

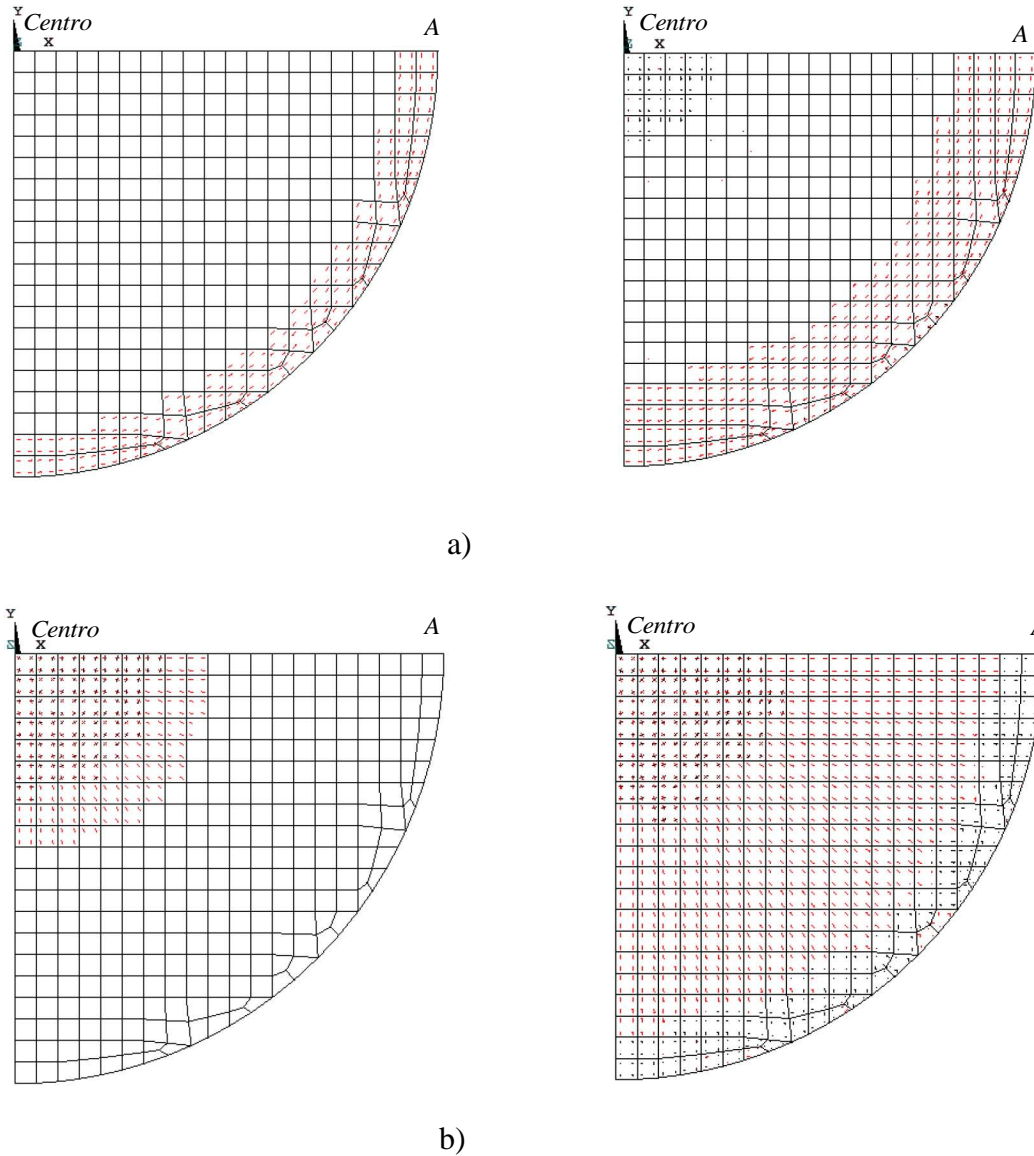


Figura 4.9. Evolución del agrietamiento de losa circular empotrada: a) parte superior y b) parte inferior

La figura 4.10 muestra la configuración del agrietamiento en losas circulares en condición de apoyo simple, la cual presenta el inicio de agrietamiento en el centro del claro, en su parte inferior y posteriormente, se propaga hacia los extremos de manera axisimétrica. Sin embargo, se observa que existe aplastamiento al centro de la losa en la parte superior debido al estado de daño al que se sometió.

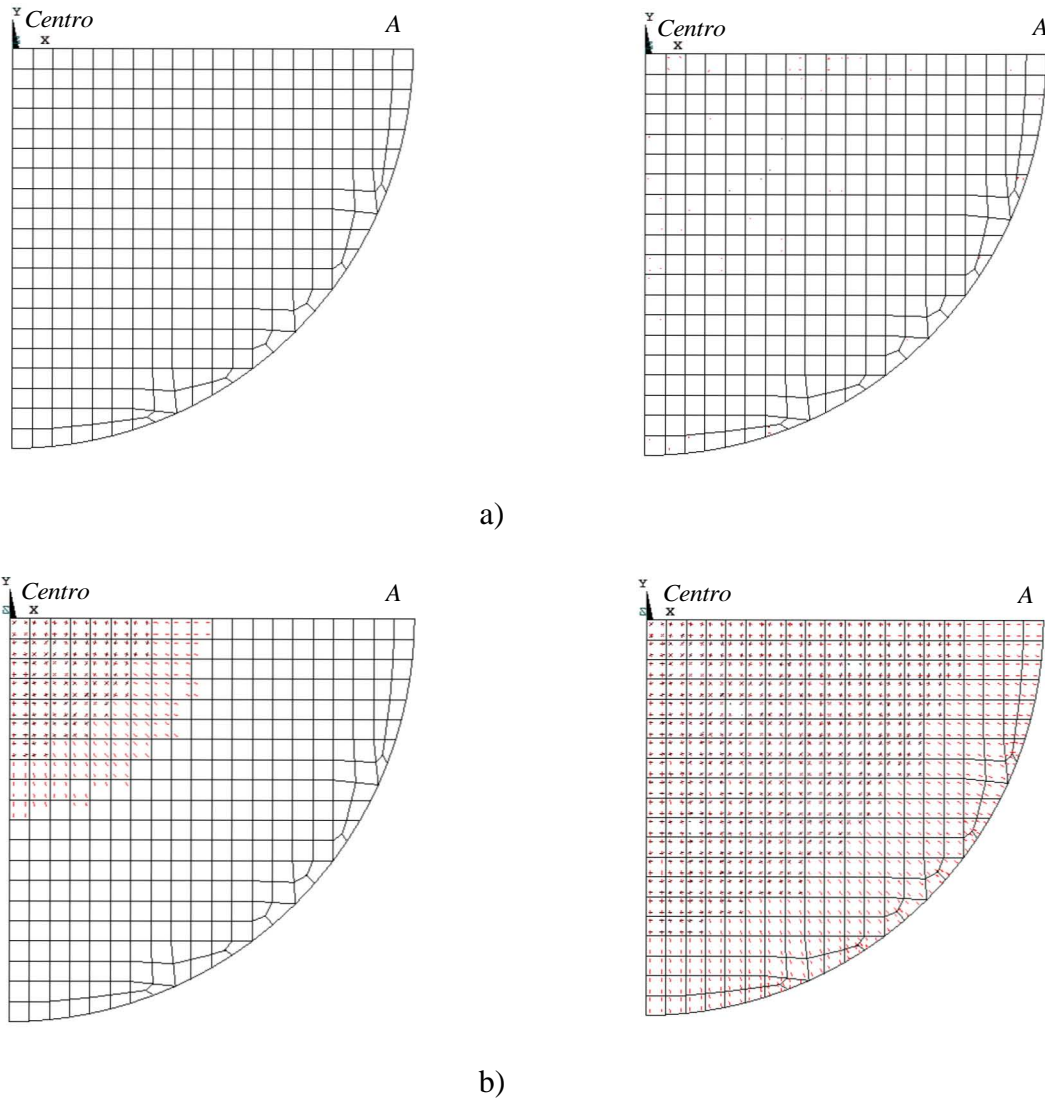


Figura 4.10. Evolución del agrietamiento de losa circular simplemente apoyada en: a) parte superior y b) parte inferior

4.2.4 Losas elípticas

Para las losas elípticas empotradas el agrietamiento inicia en la parte superior (figura 4.11a) en el borde del lado corto donde se presentan los momentos máximos. Posteriormente, la carga distribuida ocasiona grietas y aplastamiento en el centro y bordes en las dos superficies de la losa (figura 4.11b).

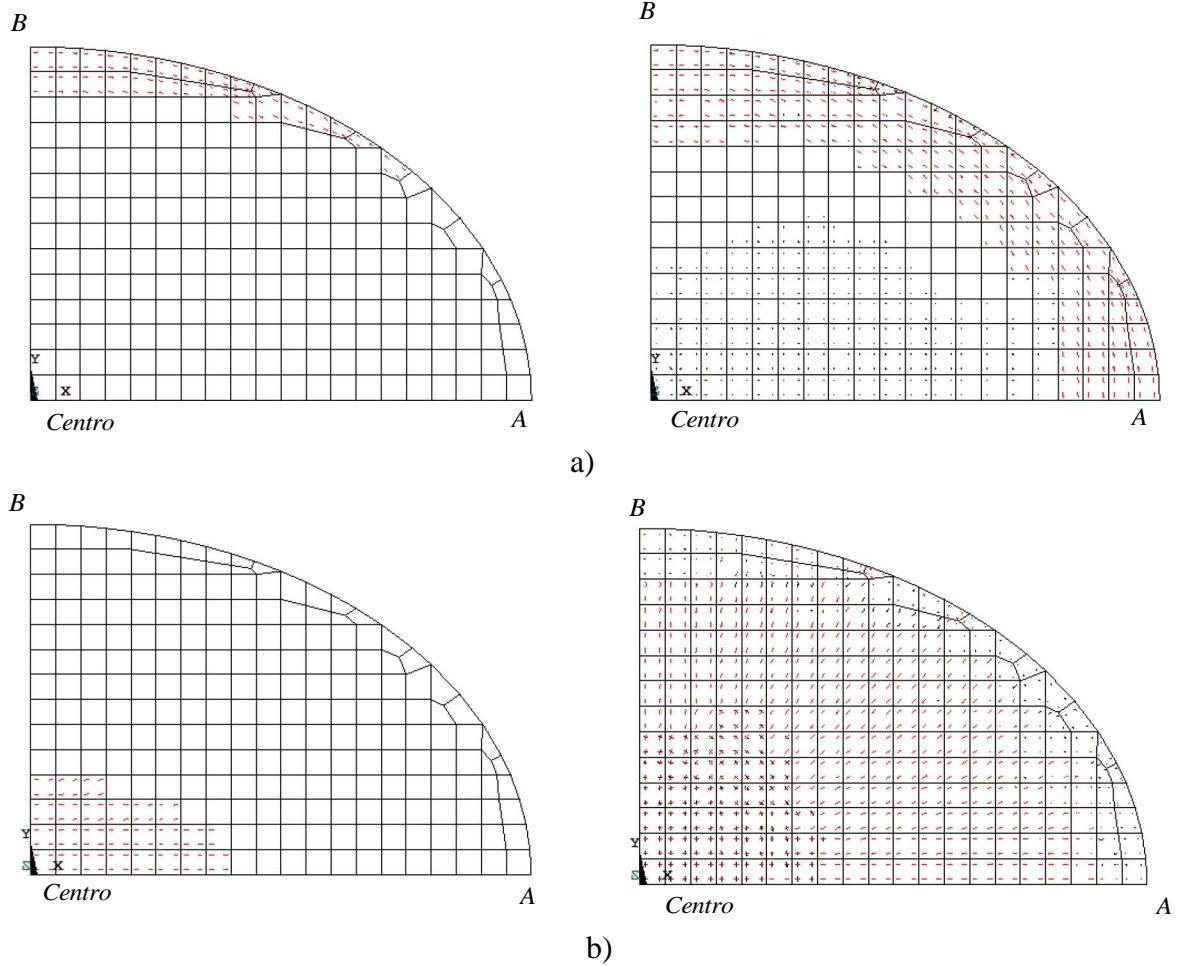
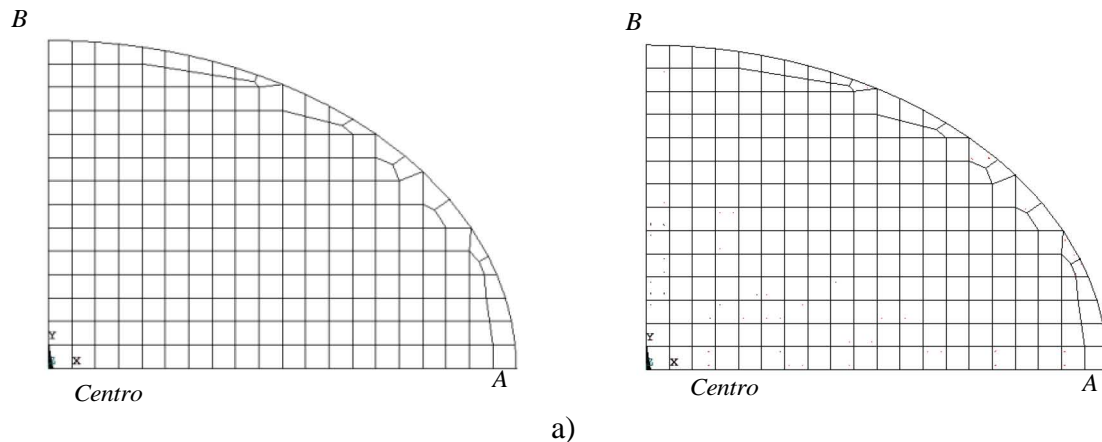


Figura 4.11. Evolución del agrietamiento de losa elíptica empotrada en: a) parte superior y b) parte inferior

Cuando las losas elípticas están simplemente apoyadas, el agrietamiento inicia en el centro del claro, en la parte inferior, tal como se ha observado en otras losas simplemente apoyadas, propagándose en todo el sistema (ver figura 4.12). Existe aplastamiento en el centro del claro debido a las condiciones de desplazamiento al que se sometió.



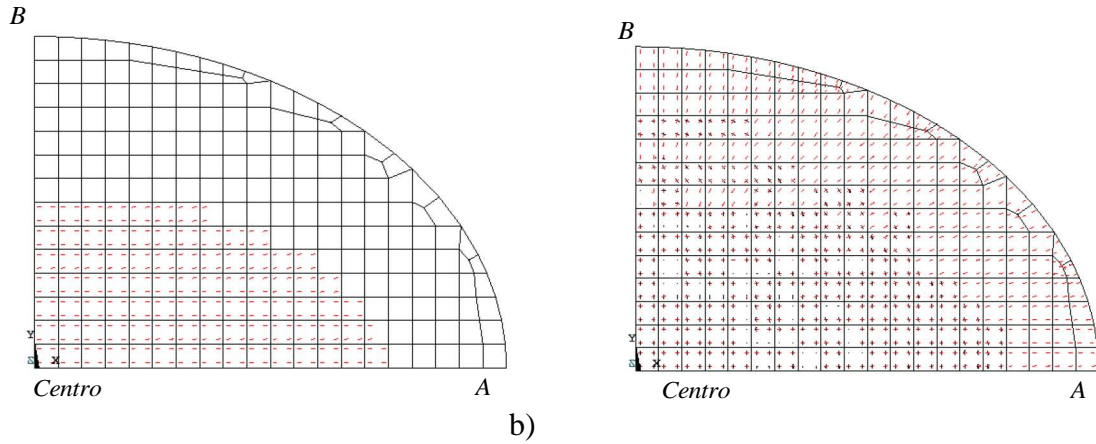


Figura 4.12. Evolución del agrietamiento de losa elíptica simplemente apoyada en: a) parte superior y b) parte inferior

En general se observa que el agrietamiento de las losas inicia al centro en la parte inferior y en los bordes en la parte superior; en consecuencia, existe aplastamiento al centro en la parte superior y en los bordes en la parte inferior.

Conclusiones y recomendaciones

Conclusiones

Con base en los resultados obtenidos se concluye que los análisis numéricos son de utilidad para el estudio de losas con geometría irregular, pues proporciona, la distribución de momentos, lo que permite establecer la ubicación del acero del refuerzo; además, permite conocer la evolución del agrietamiento de las losas al colapso.

Aunque existen una gran variedad de combinaciones de geometrías de losas irregulares, en esta tesis se determinó coeficientes de losas con geometrías triangular, circular y elíptica en condiciones de apoyo simple y empotrado. La calibración en el estudio de losas aisladas mediante modelos numéricos se realizó con reportes experimentales de la literatura de una losa rectangular.

El armado propuesto para cada losa, con base en un análisis elástico de una placa homogénea de concreto reforzado, resulta adecuado, pues se obtiene una buena aproximación de la distribución de momentos y de la localización e inicio del agrietamiento en la losa. Se establecieron longitudes de acero negativo y positivo, las cuales se recomiendan para el diseño y construcción de este tipo de losas.

Se descartan los métodos de límite superior o inferior para determinar las trayectorias de agrietamiento, los coeficientes o carga de colapso, pues a pesar de que estos métodos proporcionan trayectorias de agrietamiento, no indican si éste es en la cara superior o inferior de la losa; además, estos métodos sólo proporcionan una carga de colapso, que puede ser mayor o menor a una carga de diseño. Por lo anterior, se utilizó la mecánica numérica que proporciona el inicio y evolución del agrietamiento, así como la variación de los momentos en el rango no lineal.

Se observó que el MEF es una herramienta numérica válida en la comparación de resultados numéricos con resultados experimentales reportados en la literatura, mostrando que la curva carga contra desplazamiento es consistente, pues a pesar de que la curva experimental muestra una recuperación de desplazamiento, se considera que éste fue debido a un corrimiento de los instrumentos de medición, pues ante una carga vertical incremental como la del experimento no puede presentarse una recuperación de desplazamientos al centro.

Los coeficientes obtenidos con elementos finitos placa son consistentes en el rango elástico con aquellos obtenidos con elementos finitos sólidos. Posteriormente, cuando se tiene un comportamiento no lineal, el valor de estos coeficientes cambia debido a que existe una redistribución de esfuerzos al aparecer el agrietamiento en el concreto y/o fluencia en el

acero de refuerzo. Se tomaron los coeficientes máximos como los de diseño con la finalidad de garantizar un comportamiento estructural adecuado y un mejor aprovechamiento de los materiales considerando modelos constitutivos más refinados.

En general, el agrietamiento en las losas simplemente apoyadas inicia en el centro del claro en la cara inferior, propagándose hacia los bordes; mientras que en las losas empotradas el agrietamiento inicia en sus bordes en la cara superior, posteriormente en el centro del claro en la parte inferior, propagándose al incrementar la carga.

Recomendaciones

Con base en los resultados obtenidos, se recomienda lo siguiente:

- Sí existe mayor complejidad en el sistema en cuanto a geometría o carga, se sugiere realizar modelos numéricos refinados.
- Realizar modelos con otras geometrías o combinaciones presentes en la práctica profesional.

Trabajos futuros

Los trabajos futuros que se plantean son:

- Realizar modelos con otras geometrías irregulares.
- Estudiar el efecto de la rigidez de vigas perimetrales.
- Realizar algunos modelos experimentales y comparar con los resultados numéricos.
- Establecer estudios para determinar el espesor.
- Estudiar la influencia de materiales de reparación en el comportamiento estructural del sistema.

Referencias

- [1] Ansys (2009), “Ansys 12.0.1”, *Ansys Inc. Estados Unidos*.
- [2] Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary (1963), *American Concrete Institute, ACI 318*.
- [3] Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary (2002), *American Concrete Institute, ACI 318*.
- [4] Casillas J. y Siess C.P. (1961), ”Comparative studies of design procedures for two way reinforced concrete slabs ”, *Serie de Investigación Estructural No. 215*, University of Illinois, Urbana, Illinois.
- [5] Cope R.J., Rao P.V., Clark L.A. and Norris R. (1980), “Modeling of Reinforced Concrete Behavior for Finite Element Analysis of Bridge Slabs”, Numerical methods for Nonlinear Problems. *C. Taylor, E. Hinton and D.R.J. Oden, Pineridge Press, Swansea*.
- [6] CSI (2004), “SAP2000 Advanced 12.0.0”, *Computers and Structures, Inc., Berkeley, California*.
- [7] Di Stasio J. y Van Buren M.P (1936), “Slabs Supported on Four Sides”, *ACI Journal*, Vol. 32, Estados Unidos.
- [8] Reissner E. (1945), “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 12.
- [9] Esteva L. (1963), “Coeficientes de diseño para losas con bordes libres”, *Serie del instituto de Ingeniería No. 73*, Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
- [10] Fédération internationale du béton (1999), “Structural Concrete: textbook on behavior, design and performance”, *CEB/FIP Model Code 1990*, Vol.2.
- [11] Feenstra P.H. y De Borst R. (1995),”Constitutive Model for Reinforced Concrete”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 121, Paises Bajos.
- [12] Bryan G. H. (1891), “ Proceeding of the London Mathematical Society”.
- [13] Galerkin B.G (1923), “ Z. angew. Math. Mech” vol. 3.
- [14] Girolami A.G., Sozen M.A y Gamble W.L. (1970), “Flexural Strength of reinforced concrete slabs with externally applied in-plane forces”, *Report to the department of defense*, Universidad de Illinois, Urbana, Illinois.

- [15] González O.M. y Robles F. (2007), “Aspectos fundamentales del concreto reforzado”,
Cuarta edición, Limusa, México.
- [16] González O.M. (2011), “Comunicación personal”.
- [17] Institution of Structural Engineers (2006), “Manual for the design of concrete building structures to Eurocode 2”, IstructE/ICE.
- [18] Johanson K.W.(1964), “Yield Line Theory”, Cement and Concrete Association, Londres.
- [19] Johnson, D. (2006),”Collapse Analysis of Reinforced Concrete Slabs : Are the Up and Down Roads One of the Same?”, Nottingham Trent University, Gran Bretaña.
- [20] Kelvin y Tait (1867), “Natural Philosophy”, *Primera edición*.
- [21] Kirchhoff G. (1850), “Ueber dash Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe”, *Crelles Journal* v.40.
- [22] Woinowsky-Krieger S (1867), “Ingr.-Arch”, *Vol 4*.
- [23] Lagrange J.L. (1828). *Ann Chim*, vol. 39.
- [24] Love A.E.H. (1906), “Mathematical Theory of Elasticity”, *Primera edición*.
- [25] Love A.E.H. (1927), “Mathematical Theory of Elasticity”, *Cuarta edición*
- [26] Marcus H. (1929), "Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten", Julius Springer, Berlín.
- [27] Meli R. (2008), “Diseño Estructural”, *Segunda Edición*, Limusa, México. Meli R. (2008), “Diseño Estructural”, *Segunda Edición*, Limusa, México.
- [28] Navier, C.L.M.H. (1823), “Bulletin des Sciences de la Societe Philomathique de Paris”.
- [29] Newmark, N. M. y Siess, C. P. (1950), "Proposed Design Specifications for Two-Way Floor Slabs” *ACI Journal*, Vol. 46, Estados Unidos.
- [30] Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo (NTCDS-2004) del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal. *Gaceta Oficial del Distrito Federal*.
- [31] Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto (NTCDCEC-2004) del Reglamento de Construcciones para el Distrito

Federal. *Gaceta Oficial del Distrito Federal*.

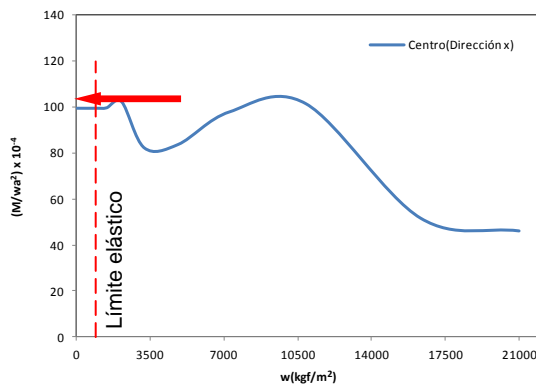
- [32] Poisson, S.D. (1829) “Memoire sur l’équilibre et le mouvement des corps elastique”, *Mem Acad Sci*, vol. 8.
- [33] Park R. y Gamble W. L. (2000), “Reinforced Concrete Slabs”, *Segunda Edición*, John Wiley & Sons, Inc, New York.
- [34] Rashid Y.R. (1968), “Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels”, *Nuclear Engrg. Des. Vol.7*.
- [35] R. D. Mindlin. (1951), “Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18.
- [36] Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (RCDF-2004). *Gaceta Oficial del Distrito Federal*.
- [37] Rots J.G. (1988), “Computational modeling of Concrete Fracture”, *PhD thesis*, Delft Univ. of Technol. Países Bajos.
- [38] Ventsel E. y Krauthammer T. (2001), “Thin Plates and Shells; Theory, Analysis and applications”, *Primera edición*, Marcel Dekker AG.
- [39] Westergaard H M. y Slater W A. (1921), "Moments and Stresses in Slabs," *ACI Journal*, Proceedings, V. 17, No. 2. Estados Unidos
- [40] Wood R.H.(1961), “Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates”, *Primera Edición*, Thames & Hudson, Gran Bretaña.
- [41] Saint-Venant (1883), “Clebsch’s Theory of Elasticity”, *Note by Saint-Venant*, Paris.
- [42] Timoshenko S P. y Woinosky-Krieger. (1959) “Theory of Plates and Shells”, *Segunda edición*, McGraw Hill, Estados Unidos.

Anexo I

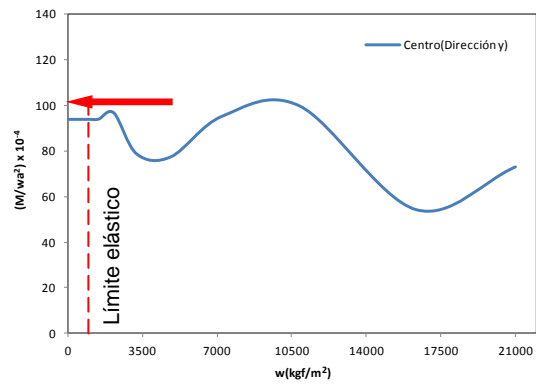
Variación de los coeficientes

En este anexo se presentan la variación de los coeficientes contra la carga distribuida aplicada en la parte superior.

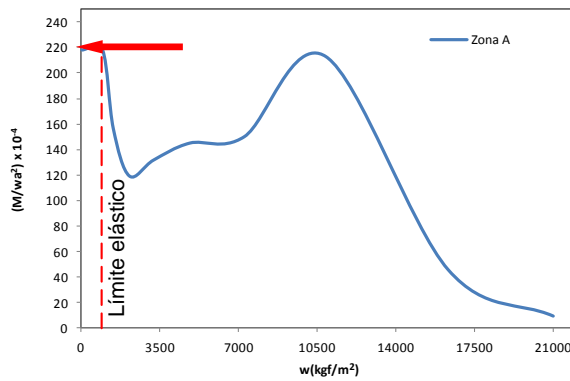
Losas triangulares



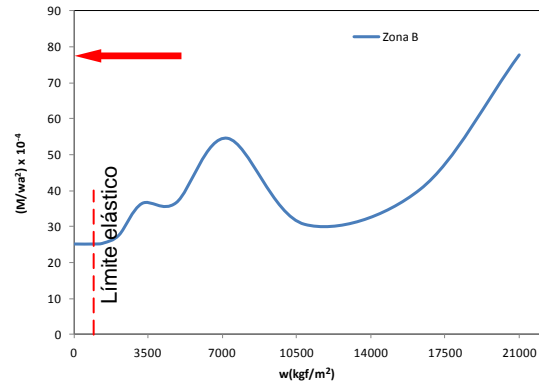
a)



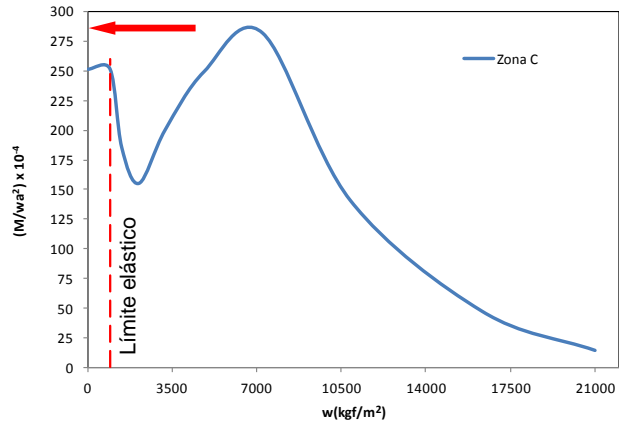
b)



c)

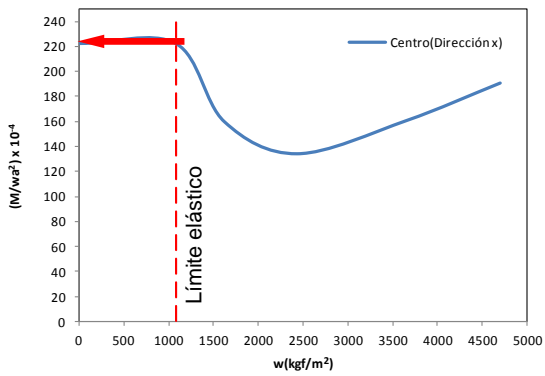


d)

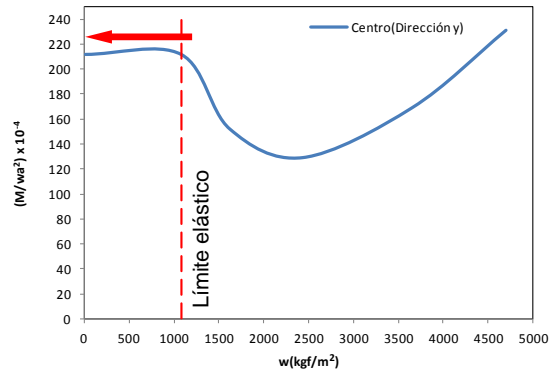


e)

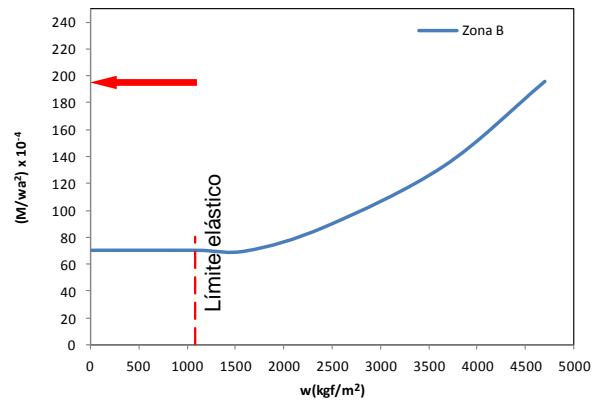
Figura A. 1. Coeficiente vs carga distribuida en triángulo empotrado con $a=4\text{m}$ donde los incisos indican la distribución de momentos máximos de acuerdo a la figura 4.3



a)



b)



c)

Figura A. 2. Coeficiente vs carga distribuida en el centro del claro para triángulo simplemente apoyado con $a=4\text{m}$ de acuerdo a la figura 4.3

Losas circulares

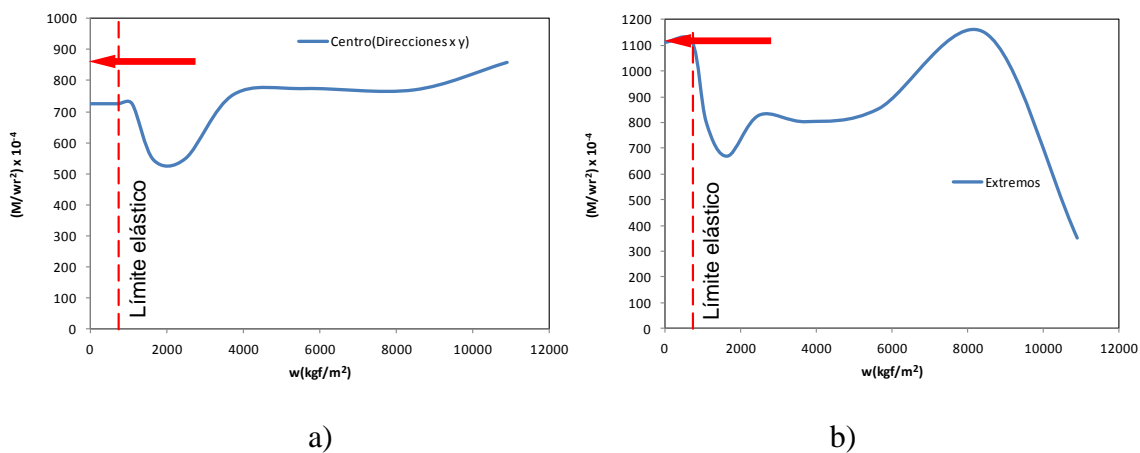


Figura A. 3. Coeficiente vs carga distribuida en círculo empotrado con $r=2m$ donde: a) es en el centro del claro y b) en los extremos

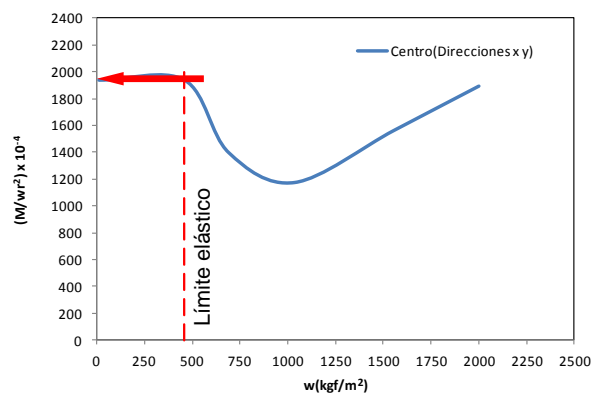


Figura A. 4. Coeficiente vs carga distribuida en el centro del claro para círculo simplemente apoyado con $r=2m$

Losas elípticas

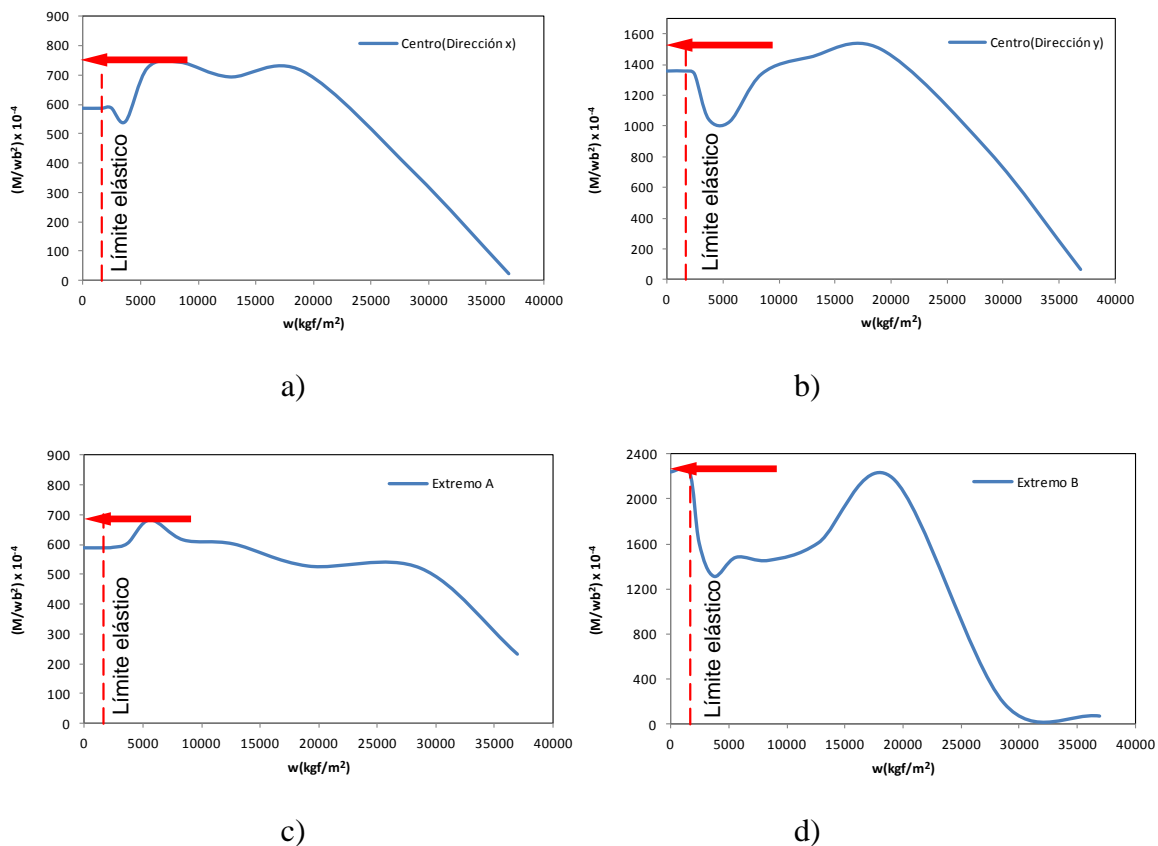


Figura A. 5. Coeficiente vs carga distribuida en elipse empotrada con relación $b/a=0.5$ donde: a) y b) es en el centro del claro y c) y d) es en los extremos

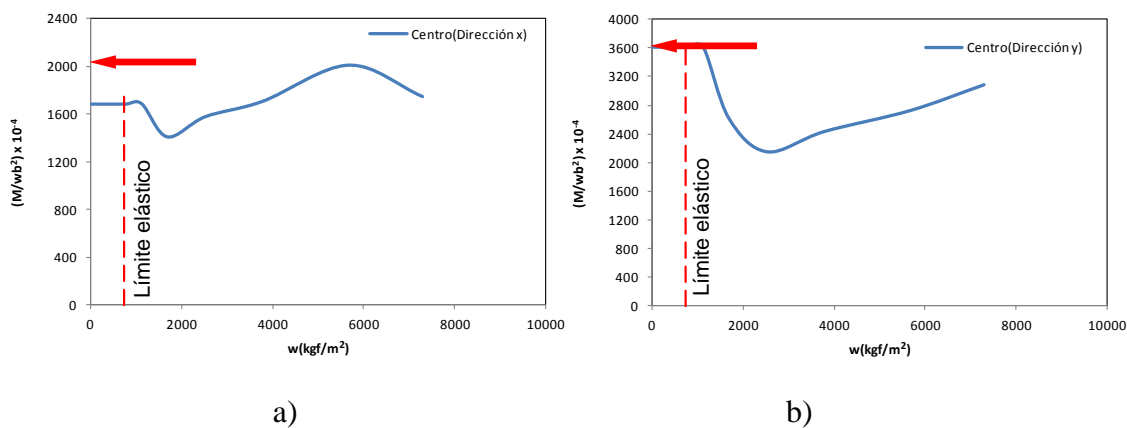


Figura A. 6. Coeficiente vs carga distribuida en elipse simplemente apoyada con relación $b/a=0.5$ donde: a) y b) es en el centro del claro

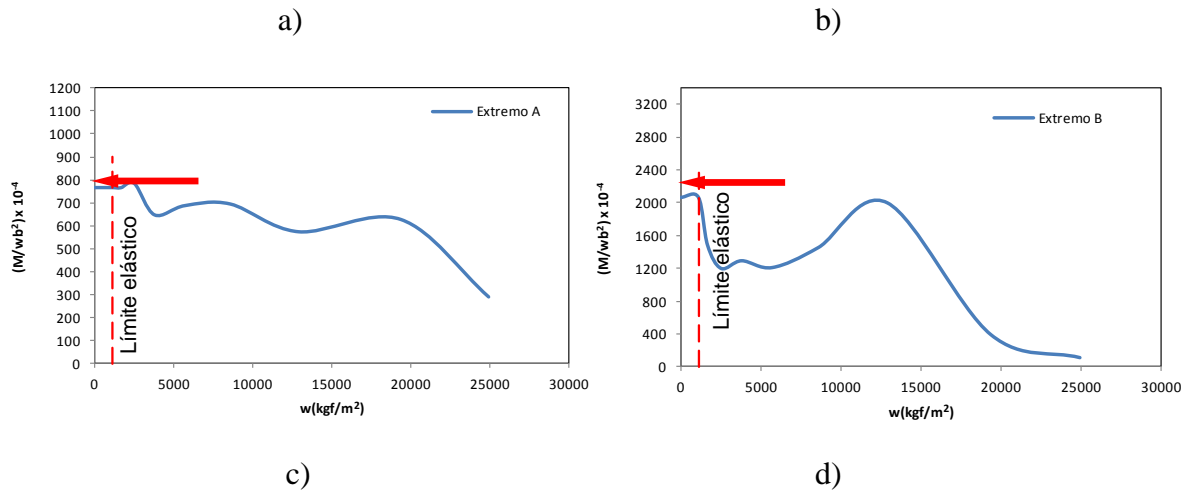
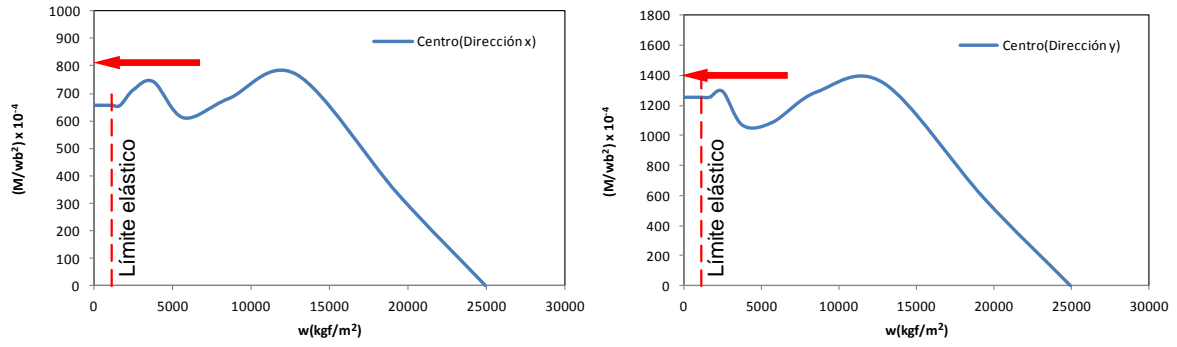


Figura A. 7. Coeficiente vs carga distribuida en elipse empotrada con relación $b/a=0.6$ donde: a) y b) es en el centro del claro y c) y d) es en los extremos

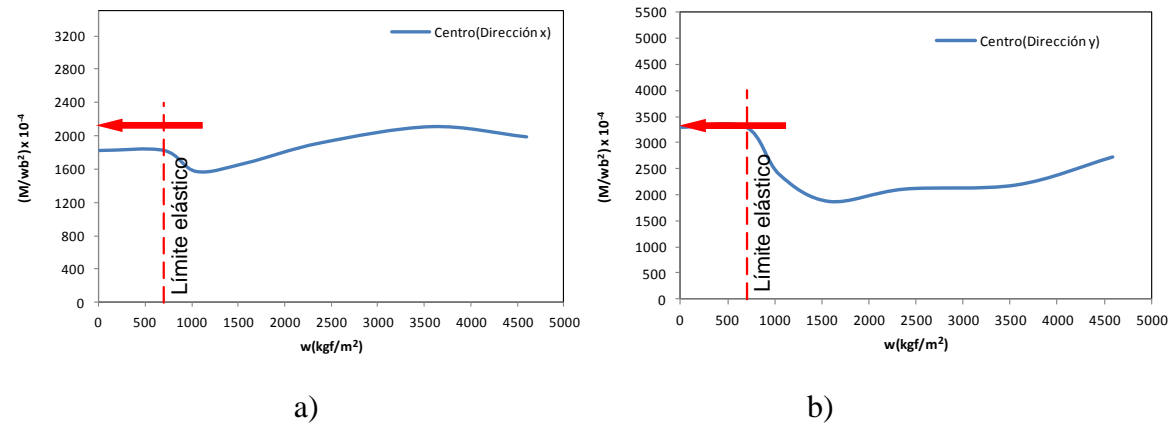


Figura A. 8. Coeficiente vs carga distribuida en elipse simplemente apoyada con relación $b/a=0.6$ donde: a) y b) es en el centro del claro

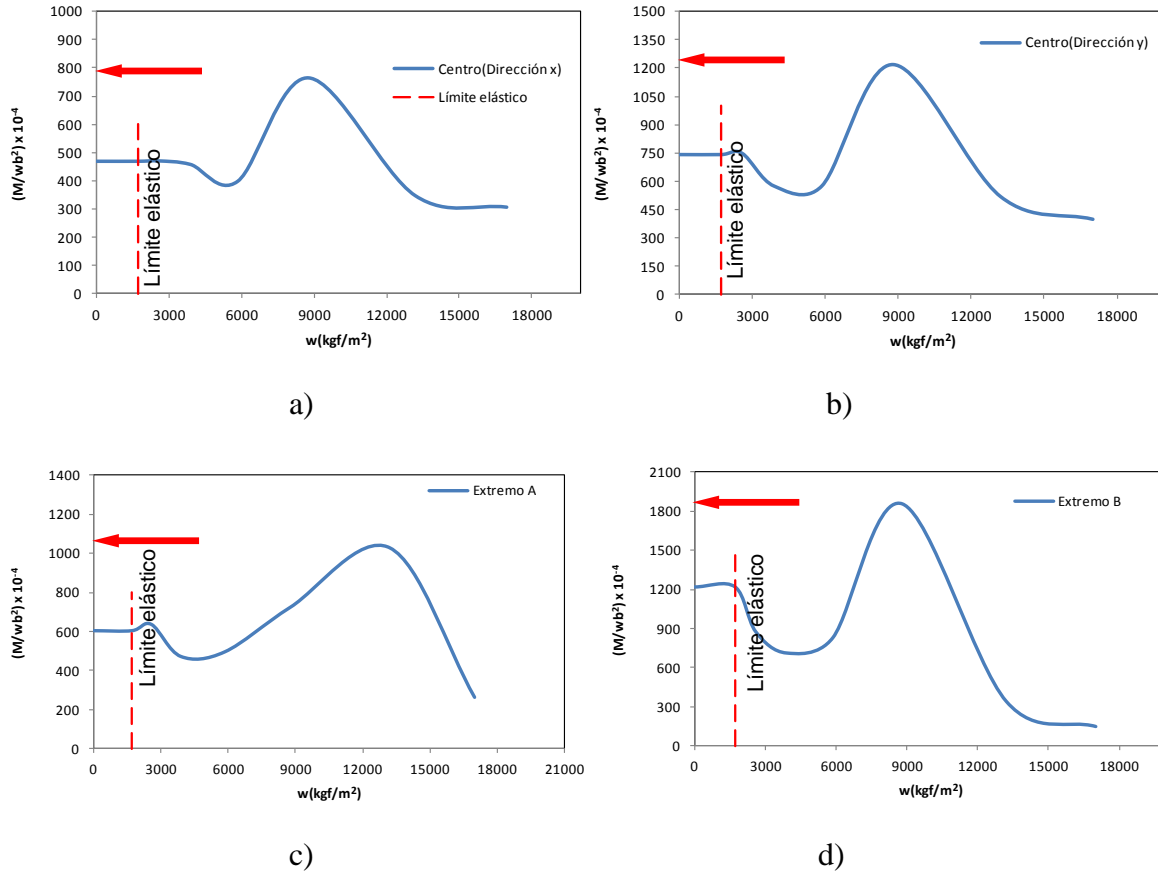


Figura A. 9. Coeficiente vs carga distribuida en elipse empotrada con relación $b/a=0.7$ donde: a) y b) es en el centro del claro y c) y d) es en los extremos

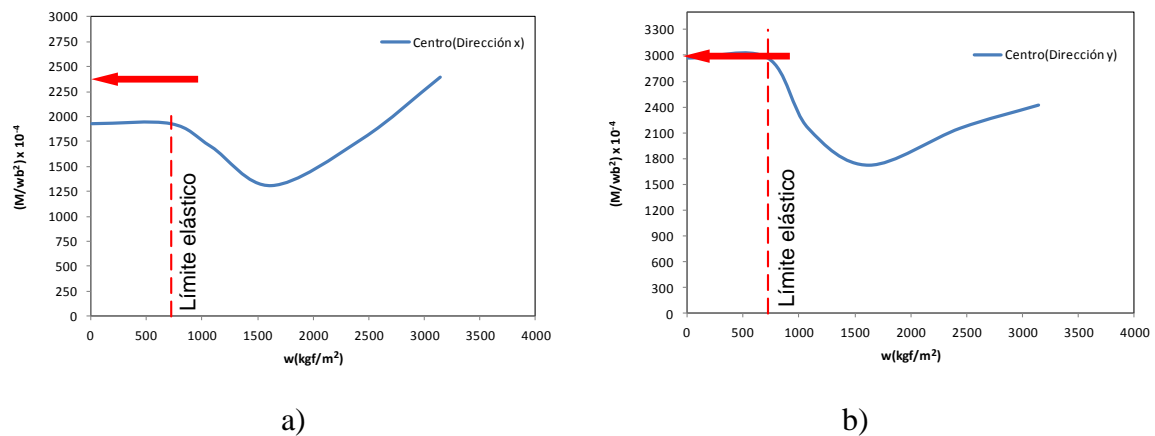
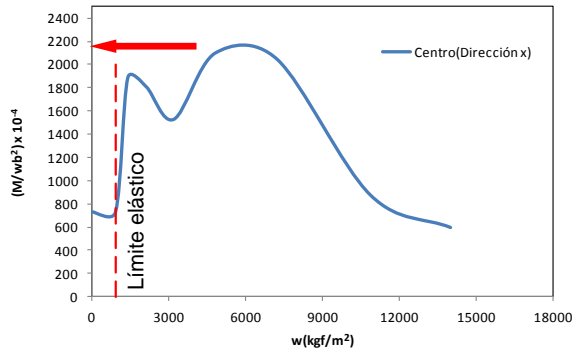
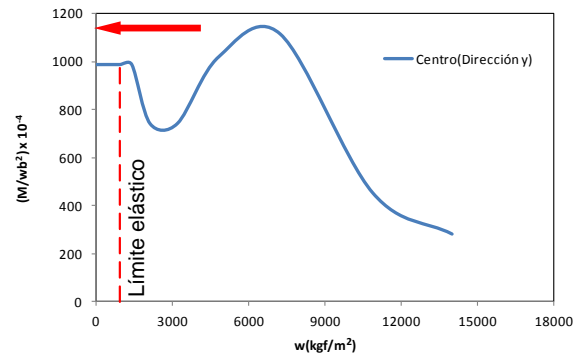


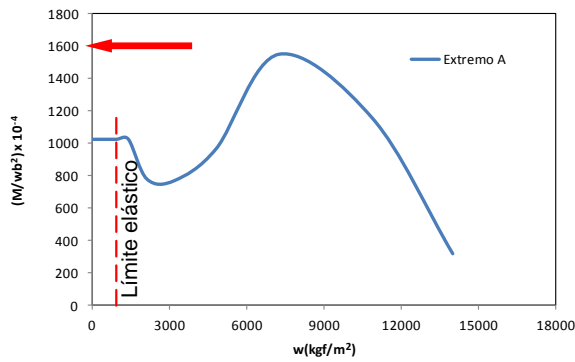
Figura A. 10. Coeficiente vs carga distribuida en elipse simplemente apoyada con relación $b/a=0.7$ en el centro del claro dónde: a) y b) es en el centro del claro



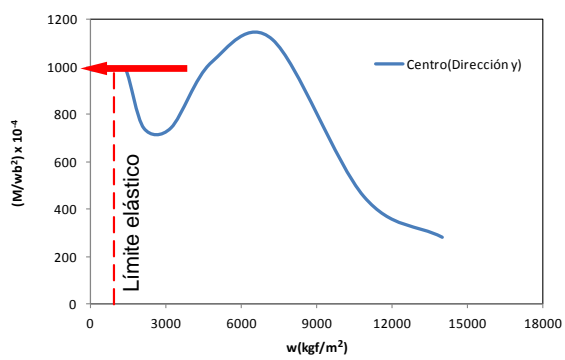
a)



b)

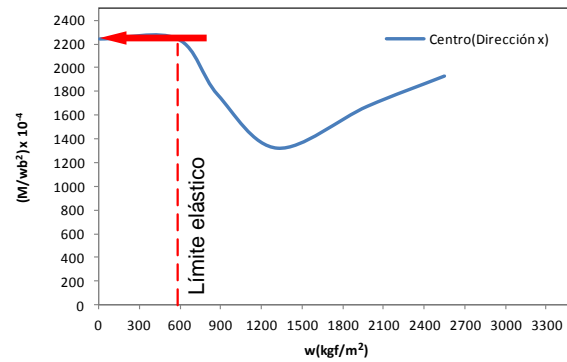


c)

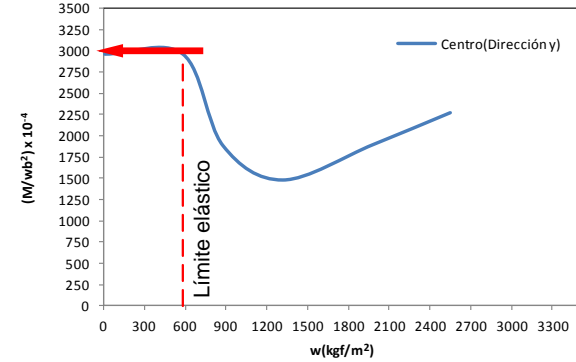


d)

Figura A. 11. Coeficiente vs carga distribuida en elipse empotrada con relación $b/a=0.8$ donde: a) y b) es en el centro del claro y c) y d) es en los extremos



a)



b)

Figura A. 12. Coeficiente vs carga distribuida en elipse simplemente apoyada con relación $b/a=0.8$ donde: a) y b) es en el centro del claro

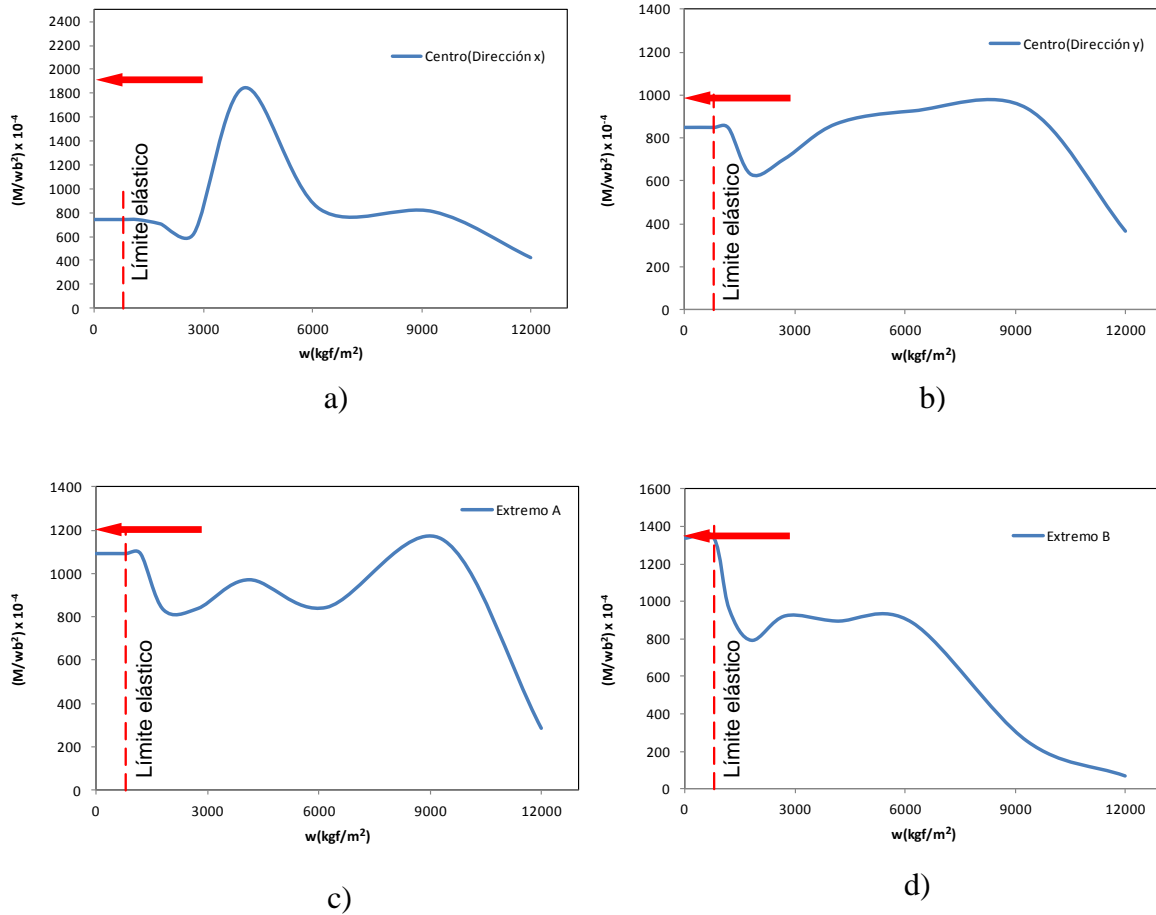


Figura A. 13. Coeficiente vs carga distribuida en elipse empotrada con relación $b/a=0.9$ donde: a) y b) es en el centro del claro y c) y d) es en los extremos

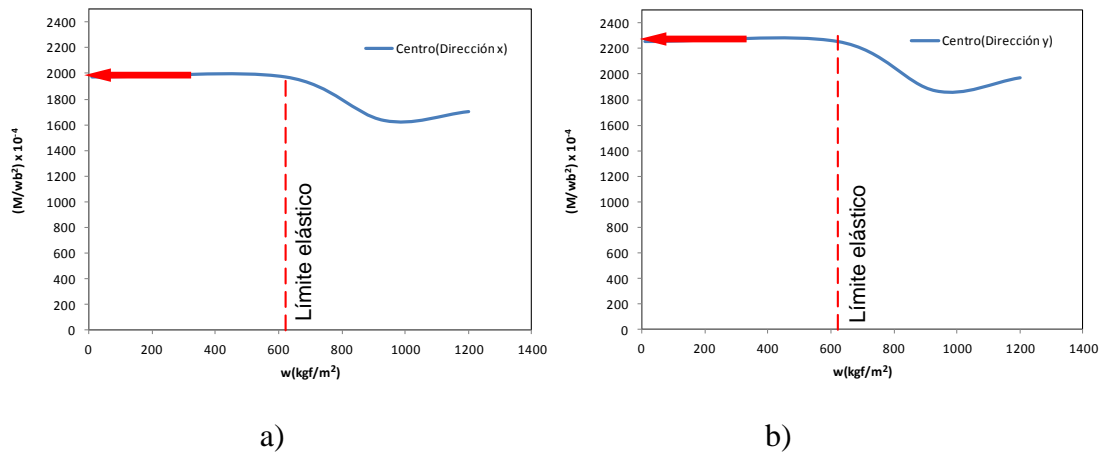


Figura A. 14. Coeficiente vs carga distribuida en elipse simplemente apoyada con relación $b/a=0.9$ donde: a) y b) es en el centro del claro

Anexo II

Cálculo de momentos flexionantes

En este anexo se muestra el programa desarrollado para el cálculo de momentos a partir de valores de esfuerzo en los nodos.

```
clc; clear all; close all;
A=load('omar.txt');
n=length(A);
for i=1:n
    if (i==1)
        p1=[A(1,2) A(1,3)];
        r=(roots(p1))
        if (r>2.5 && r<5)
            syms x
            f1=abs(int((A(1,2)*x+A(1,3))*x,x,2.5,r));
            f11=abs((int((A(1,2)*x+A(1,3))*x,x,r,5)));
            ft1=abs(f1)+abs(f11);
        else
            syms x
            ft1=abs(int((A(1,2)*x+A(1,3))*x,x,2.5,5));
        end
    end

    if (i==2)
        p2=[A(2,2) A(2,3)];
        r2=(roots(p2))
        if (r2>0 && r2<2.5)
            syms x
            f2=abs(int((A(2,2)*x+A(2,3))*x,x,0,r2));
            f22=abs((int((A(2,2)*x+A(2,3))*x,x,r2,2.5)));
            ft2=f2+f22;
        else
            syms x
            ft2=abs(int((A(2,2)*x+A(2,3))*x,x,0,2.5));
        end
    end

    if (i==3)
        p3=[A(3,2) A(3,3)];
        r3=(roots(p3))
        if (r3>0 && r3<2.5)
            syms x
            f3=abs(int((A(3,2)*x+A(3,3))*x,x,0,r3));
            f33=abs((int((A(3,2)*x+A(3,3))*x,x,r3,2.5)));
            ft3=f3+f33;
        else
            syms x
            ft3=abs(int((A(3,2)*x+A(3,3))*x,x,0,2.5));
        end
    end
end
```

```

end

if (i==4)

    p4=[A(4,2)  A(4,3)];
    r4=(roots(p4))
    if (r4>2.5 && r4<5)
        syms x
        f4=abs(int((A(4,2)*x+A(4,3))*x,x,2.5,r4));
        f44=abs((int((A(4,2)*x+A(4,3))*x,x,r4,5)));
        ft4=f4+f44
    else
        syms x
        ft4=abs(int((A(4,2)*x+A(4,3))*x,x,2.5,5));
    end

end

end

Mseparados=[ft1 ft2 ft3 ft4]

Mtot=(ft1+ft2+ft3+ft4)

```